平成１９年度博士前期課程　IIIコース　入試問題

１．

図の様に水平に置かれた台の上に，バネと重りがつながれている。重りの質量を m，バネ係数を k，とする。重りと台の間には，速度に比例する抵抗が働く。その係数を Γ とする。バネの自然長から図の右方向に距離 a 離れた位置まで重りを引っ張り，$t=0$ で手を離した。

1. この時の運動方程式を示しなさい。
2. 力学的エネルギー（運動エネルギーとバネの位置エネルギーの和）の時間的減少率は速さの二乗に比例する事を示しなさい。

定数として；$\omega=\sqrt{k/m}$，$\gamma=\Gamma/m$，で示される ω と γ を用いて運動方程式を書き直し，以後は，ω と γ を用いて解答しなさい。

3. 重りの運動が減衰振動となるための条件と振動数を示しなさい。以下ではここで求めた振動数を ω' と置いて解答しなさい。
4. 重りが減衰振動をする時，重りの位置の時間的変化を図示しなさい。

上の状況で，外部から $f\cos\omega_f t$ の水平方向外力が重りに加えられた場合を考える。運動が始まって十分時間が経った時だけを考えれば良い。

5. 重りの位置と時間の関係を求めなさい。
6. この時の重りの運動の振幅を求めなさい。
7. 単位時間あたりに消費されるエネルギーを求めなさい。

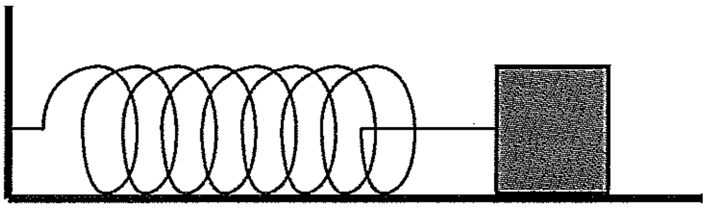


図 1: バネに重りがつながれている

平成１９年度博士前期課程　IIIコース　入試問題

２．

1. 真空中に図1のように、厚みが無視できる2枚の無限大の金属板を z 軸に垂直となるように $z=-a,+a$ の位置に平行におき、単位幅当たり大きさ j の電流を上の金属板には y 方向、下の板には $-y$ 方向に流す。金属板間と外の上下それぞれの磁場を求めよ。真空の透磁率を μ_0 とする。

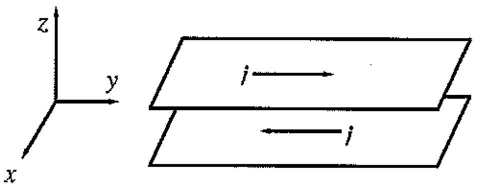


図 1:

2. 図2にのように、均一な磁束密度 B の中に、半径 a、長さ L の金属製の円柱を入れ、回転軸の周りに角速度 ω で回転させる。回転軸は磁場と平行である。回転軸と円柱側面の間にできる電位差を求めよ。

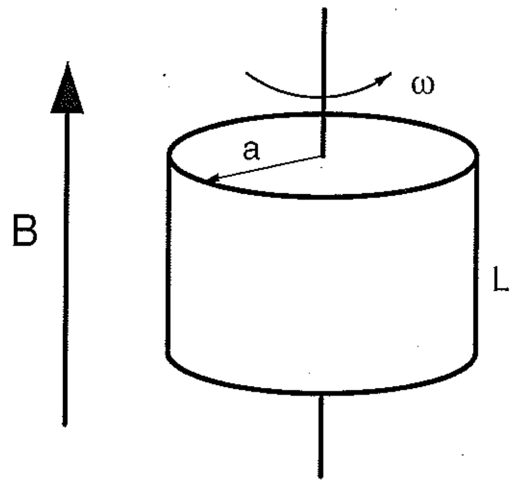


図 2:

３．

スピンが１の荷電粒子のスピンの運動を考えます。スピンの状態ベクトルを $\Psi(t)$ とすると、y 軸方向に一様な磁場中の運動を記述するシュレディンガー方程式は

$$i\hbar\frac{d}{dt}\Psi(t) = H_S\Psi(t)\ ,\ H_S = \hbar\omega\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

と書かれます。ω は定数です。

1. H_S の固有値 E_n と規格化された固有ベクトル Ψ_n を求めなさい。

2. 二つの物理量（x 方向と z 方向のスピン）に対応している演算子を

$$S_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\ ,\ S_z = \hbar\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\ ,$$

とします。S_x と S_z の期待値

$$< S_x > (t) = \Psi^\dagger(t)S_x\Psi(t)\ \text{と}\ < S_z > (t) = \Psi^\dagger(t)S_z\Psi(t)$$

の満たす運動方程式を求めなさい。（ヒント：$d < S_{x,z} > (t)/dt$ をシュレディンガー方程式を使って表す。）

3. 初期条件を

$$< S_x > (0) = 0,\ \ < S_z > (0) = S_0$$

（S_0 は定数）として問い２で得られた運動方程式の解を求めなさい。

4. $t = 0$ の時の状態ベクトルを

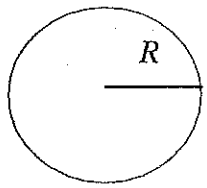
$$\Psi(0) = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

として、$t \neq 0$ の時の $\Psi(t)$ を求めなさい。（ヒント：　H_S の固有ベクトルは完全系を成しているということと、定常状態（エネルギーが一定の状態）を記述する状態ベクトルの時間依存性を思いだす。）

5. スピンが問い４の状態ベクトル $\Psi(t)$ で記述されている時、$S_z = +\hbar$ を観測する確率を t の関数として表しなさい。（ヒント：　S_z の固有値が $+\hbar$ に対応している S_z の固有ベクトルを求める。$\Psi(t)$ がこの固有ベクトルを含んでいる確率は？）

電磁気

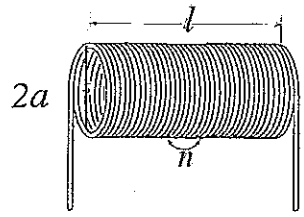
問１　半径 R の球内に電荷 が一様な密度 ρ で分布しているとする。
この球が作る電場を球の中心からの距離 r の関数として求め、図示せよ。



問２　この球は、無限遠から電荷を運んで作ったと考えることが出来る。
この時に必要な仕事あるいは静電エネルギーを求めよ。

問３　この球が作る電場のエネルギー密度を全空間について積分したものが、
問２と等しいことを示せ。

問４　自己インダクタンス L のコイルに、準静的に電流を流し始める。自己誘導に打ち勝って電流を流すためには仕事をすることになる。コイルに、I の強さの電流を流した時までにする仕事を求めよ。このコイルの抵抗は無視する。



問５　単位長さあたりの巻き数 n 、長さ l 、コイルの断面の半径 a で　$l >> a$ の理想的なコイルを考える。このコイルに電流 I が流れている時の磁束密度はこのコイルの内部にしか存在しないことを示し、その大きさを求めよ。またこのコイルが持つ磁場のエネルギー密度を磁束密度の関数として求めよ。

全ての問題は真空中とし、式を導出する過程を示すこと。
真空中の誘電率を ε_0　透磁率を μ_0 とせよ。

５．

1. 内部エネルギーU，エントロピーS，温度T，圧力p，体積Vとすると，準静的過程に対する熱力学の第一法則は次のように表される。

$$dU = TdS - p\,dV$$

問１ SをTとVの変数と考えることにより，次式の関係が成り立つことを示しなさい。

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial U}{\partial T}\right)_V = T\left(\dfrac{\partial S}{\partial T}\right)_V & (1) \\ \left(\dfrac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\dfrac{\partial S}{\partial V}\right)_T - p. & (2) \end{cases}$$

問２ 式(1)および(2)から次の関係式が成り立つことを示しなさい。

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \qquad (3)$$

2. 単位体積当たりの内部エネルギー$u \equiv \dfrac{U}{V}$が温度のみの関数で，かつ，状態方程式が$p = \dfrac{1}{3}u$と表される気体がある。この気体について以下の問いに答えなさい。

問３ 式(2)および(3)から，uについて，次の微分方程式が成り立つことを導きなさい。

$$\frac{du}{u} = 4\,\frac{dT}{T}$$

問４ uの関数形を定めなさい。

問５ エントロピーSを，温度と体積の関数として求めなさい。

問６ この気体が，温度T_1で体積V_1からV_2へ準静的に等温膨張するときに，吸収する熱量Qを求めなさい。

６．

空気中で、非常に小さな油の微粒子「油滴」を、時刻 $t=0$ で $x=0$ の位置から鉛直下方向に初速度 v_0 で放出する。座標軸は下図のようにとり、鉛直下向を x 軸の正の向きにとる。油滴の質量を m、重力加速度を g として以下の問いに答えなさい。

油滴には、重力と空気による抵抗力が働く。この抵抗力の大きさは油滴の速さ v に比例し、油滴が球体であるとすると、油滴の半径 r、空気の粘性率 η を用いて、$6\pi\eta r\mathrm{v}$ で求められる。

問１．　放出後の時刻 t における油滴の落下速度 $\mathrm{v}(t)$ の式を、m, g, η, r, v_0 を用いて表しなさい。

問２．　重力と空気の抵抗力がつりあうと、油滴は一定の速さ「最終速度」で落下する。油滴の内部は均一でその密度を σ としたとき、最終速度の大きさ $\mathrm{v_T}$ を σ, g, η, r で表しなさい。

問３．　半径 $r = 1.0\times10^{-5}$ m、密度 $\sigma = 9.0\times10^{2}$ kg m^{-3} の油滴の最終速度 $\mathrm{v_T}$ は何 m s^{-1} となるかを計算し、有効数字２桁まで答えなさい。ただし、空気の粘性率は $\eta = 1.8\times10^{-5}$ N s m^{-2} で、重力加速度は $g = 9.8$ m s^{-2} とする。

油滴が帯電している場合、平行平板電極を用いて図のように垂直方向に適当な電場 E を加える（スイッチ S を閉じる）と、帯電した油滴を上昇させることが出来る。油滴の電荷を q として以下の問いに答えなさい。

問４．　電場を加えたことによる上昇運動の最終速度の大きさは $\mathrm{v_T}'$ であった。油滴の電荷 q は、η, r, E, $\mathrm{v_T}'$ と電場が無いときの最終落下速度 $\mathrm{v_T}$ で表すことができる。その式を求めなさい。

問５．　また油滴の半径 r は、電場が無いときの最終落下速度 $\mathrm{v_T}$ から求められる。問４の結果に適応して、油滴の電荷 q を $\eta, \sigma, E, \mathrm{v_T}, \mathrm{v_T}', g$ を用いて表しなさい。

問６．　ミリカンは電荷の異なる油滴に対して多くの精密な測定を行い、電荷の大きさにはある重要な性質があることを直接的に証明した。それはどのようなものであるのか説明しなさい。