平成１９年度博士前期課程　IIIコース　２次募集　入試問題

１．

保存力場の中で, 一直線上 (x 軸上) で運動する質点を考える. 質点の質量を m, 位置エネルギーを $U(x)$, 全エネルギーを E と記す.

1. この時, 力学的エネルギー保存則を示しなさい. 質点の速度を v と置く.

2. これより, $E - U(x)$ は負にならない事を説明しなさい.

以後, 位置のポテンシャルが, $U(x) = D\exp(-2x) - 2D\exp(-x)$ で与えられる時を考える. D は正の定数とする.

3. 上のポテンシャル $U(x)$ を縦軸に, 位置 x を横軸にとり, グラフを示しなさい.

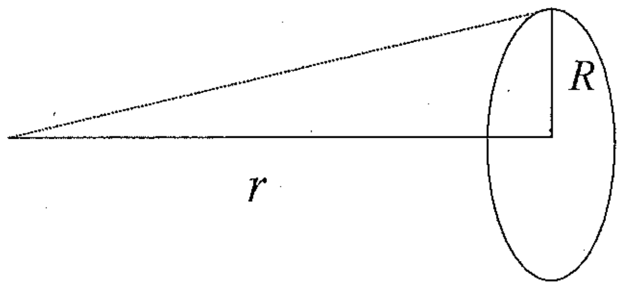
4. 小問 2 とグラフより, $E \geq 0$ と $E < 0$ の場合の質点の運動について論じなさい.

5. $y = \exp(x)$ として, 質点の速度を y を用いて示しなさい. $U(x)$ を y を用いて示しなさい.

6. $E = 0$ の時の y と t の関係を求めなさい.

電磁気

問１　半径 R の円形の輪の上に電荷が一様に分布する時に、その輪の中心軸上 r の位置での電場を求めよ。電荷の線密度を λ とする。



問２　半径 R の円盤上に電荷が一様に分布しているときの中心軸上 r の位置での電場を求めよ。面密度を σ とする。

問３　半径 R の円形回路に電流 I が流れている時の中心軸上 r の位置での磁束密度を求めよ。

問４　無限に大きな平面 xy に電荷が一様に分布する時の電場を面からの距離 r の関数として求めよ。

問５　電流 I が断面積 S の四角な銅棒を流れている。電子の速さはどのように表されるか。断面積 $1\mathrm{mm}^2$ の棒に１A の電流を流した場合の速さを具体的に計算せよ。この金属に、外部から電流に垂直に磁場を加えると起電力が発生する。この起電力はどのように表されるかを示せ。

問１－４の問題は真空中とする。問５で銅の比重は $8.93\mathrm{g/cm}^3$、原子量は63.5 とせよ。。結果を導出する過程を示すこと。
真空中の誘電率を ε_0　透磁率を μ_0 とせよ。

３．

1. 粒子のハミルトニアン演算子を $\hat{H}$ として、時間に依存しないシュレディンガー方程式を書け。

2. シュレディンガー方程式の解 $\psi(x)$ を 長さ Δx だけ並進変換した波動関数 $\psi^{\Delta x}(x)$ を

$$\psi^{\Delta x}(x) = \psi(x + \Delta x)$$

と定義する。

$\psi^{\Delta x}(x)$ を Δx の一次までテーラー展開した式は、運動量演算子 $\hat{p}$ を使って、

$$\psi^{\Delta x}(x) = \left(1 + \frac{i}{\hbar}\Delta x \hat{p}\right)\psi(x) + \mathcal{O}\left((\Delta x)^2\right)$$

と表せることを示せ。

3.

$$\psi^{\Delta x}(x) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\Delta x \hat{p}\right)\psi(x)$$

と表せることを示せ。

以下の問題では シュレディンガー方程式の任意の解 $\psi(x)$ について、それを Δx だけ並進変換した $\psi^{\Delta x}(x)$ が元のシュレディンガー方程式を満たす場合を考える。

4. 2. をヒントに、ハミルトニアン演算子 $\hat{H}$ と運動量動量演算子 $\hat{p}$ との交換関係 $[\hat{p}, \hat{H}]$ を求めよ。またこの結果の物理的意味を考察せよ。

5. ポテンシャルエネルギーを $V(x)$ とし ハミルトニアン演算子を

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})$$

とする。$V(x)$ はどのような関数であるか答えよ。

6. 波動関数に長さ l の周期的境界条件

$$\psi(x + l) = \psi(x)$$

が課されるとき、基底状態と第一励起状態を表す波動関数を求めよ。またそれぞれの縮退度を求めよ。

４．

以下の設問に答えよ。ただし、真空の透磁率を μ_0 とする。

1. 図１のような断面の同軸線に同じ大きさ I の電流を中心導体と外導体で逆向きに流す。磁束密度 $B(r)$ を同軸線の中心 $(r = 0)$ から、同軸線の外 $(r > c)$ の範囲まで求め、図示せよ。

2. 図２に断面図が示された穴の空いた導線に I の電流を流す場合を考える。電流は均一に分布して流れるとする。
　穴の中心での磁束密度を求めよ。

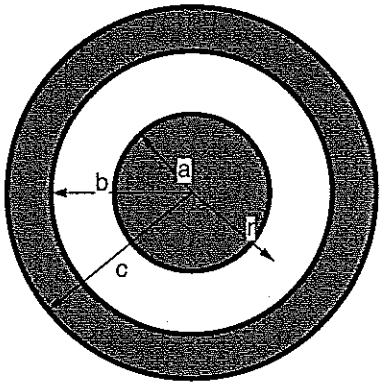


図 1:

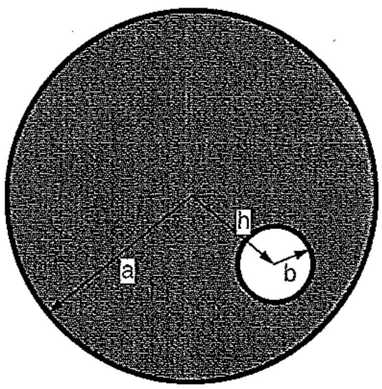
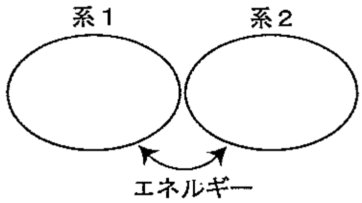


図 2:

５．

問 A. 系１および系２が接触して、エネルギーのやり取りを行う結合系がある。この結合系が、エネルギー E と $E+dE$ との間にあるときの微視状態の数 $W(E)$ は、系 1,2 のエネルギー E_1,E_2 を用いて



$$W(E) = \sum_{E_1+E_2=E} W_1(E_1)W_2(E_2)$$

と表される。ここで、W_1,W_2 は、系 1,2 の微視状態の数である。上式の和は、系 1,2 のエネルギーの和が E となるときのよせ集めである。系 1,2 の間の平衡状態について下記の設問に答えよ。ただし、系 1,2 は、系の粒子数、体積とも十分大きい巨視的な系である。

(1) 系１が、エネルギー E_1 と E_1+dE_1 との間にある確率 $w(E_1)$ は、

$$w(E_1) = \frac{W_1(E_1)W_2(E-E_1)}{W(E)}$$

である。平衡状態で実現している $w(E_1)$ についての条件を書け。

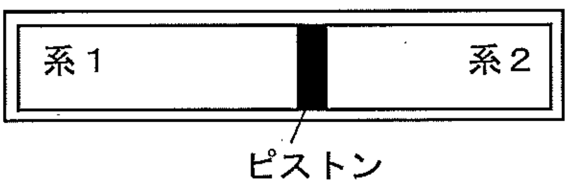
(2) (1) の条件をエントロピーを用いて書き換えよ。ただし、系 1,2 のエントロピーを S_1,S_2 と書き、結合系のエントロピーは、S と書くことにする。

(3) 平衡状態で実現している条件を系 1,2 の示強量を用いて表せ。物理量を新しく導入する場合は、その物理量が分かるように定義せよ。

問 B. 系 1,2 が気体であり、滑らかに動く断熱的ピストンで隔てられているとする。系 1,2 のエネルギー、体積、圧力、温度、エントロピーをそれぞれ E_1, V_1, p_1, S_1 および E_2, V_2, p_2, S_2 とする。

(4) 平衡状態で実現している条件をエントロピーを用いて書け。

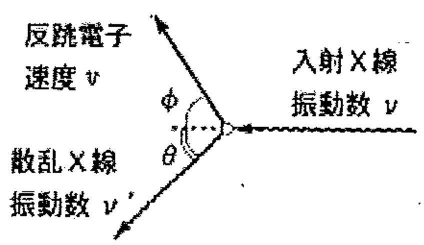
(5) (4) の条件を、示強量を用いて書け。



６．

相対性理論によれば、静止質量m_0の粒子の、速度vでの質量mとエネルギーは、それぞれ $m_0\Big/\sqrt{1-v^2/c^2}$ と $m_0c^2\Big/\sqrt{1-v^2/c^2}$ と与えられる。ここでcは光速度。

図のように、静止質量m_0の静止した電子に振動数νの入射X線が当たり、入射X線とϕをなす角度に電子がはねとばされるとともに、入射X線とθをなす角度で、電子とは逆側にX線が散乱された。散乱X線の振動数をν'とし、反跳電子の速度vは光速度に較べて十分に小さくはないとする。



プランク定数をhとして以下の問に答えよ。

（１）　散乱に際してのエネルギー保存則を書け。

（２）　（１）の結果を使って、反跳電子の質量mの２乗（m^2）と速度vの２乗（v^2）を、ν、ν'、c、h、m_0を用いて表せ。

（３）　散乱に際しての運動量保存則を書け。

（４）　（３）で書いた式からϕを消去した式を求めよ。

（５）　$\dfrac{1}{\nu'}-\dfrac{1}{\nu}$ を、c, h, m_0, θ を用いて表せ。

（６）　電子による散乱によりX線の波長が変わるこの現象の名前を述べよ。またこの現象では相対性理論の正しさの他に何がわかるか。