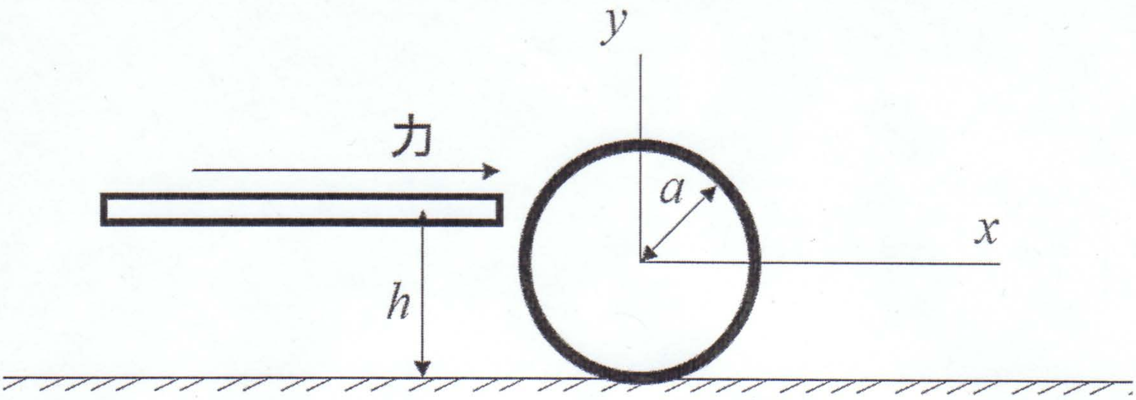
平成２０年度博士前期課程　III コース　入試問題

１．

下図に示す様に, 水平な粗い床の上に半径a, 質量Mの球が静止している時に, 高さhの位置で水平な向きに棒で突くことを考える.



時間 $t=t_0$から $t=t_1$の間に x方向に力 $F=\alpha t^2$の力で突いた時, $t=t_1$における以下の問いに答えよ.

(1) 球の重心の速度 vを求めよ.

(2) 球の重心まわりの慣性モーメントを Iとして角速度 ωを求めよ.

(3) 球が滑らずに転がる hの条件を求めよ.

(4) 球の半径 aを用いて, 球の重心まわりの慣性モーメント Iを表せ.

(5) 球が滑る場合について hの条件を aを用いて示し, 球の回転方向, 摩擦力を受ける方向について説明せよ.

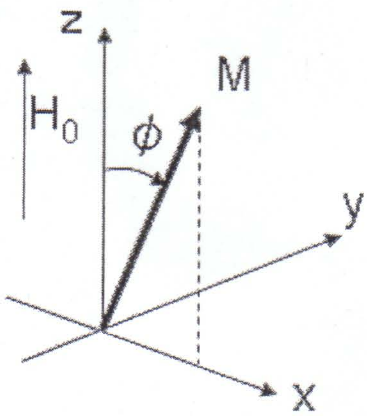
平成２０年度博士前期課程　IIIコース　入試問題

２．

Ｚ軸に平行な静磁場 $\vec{H}=H_0\vec{k}$ 下に下図のように磁気モーメント $\vec{M}$ が置かれている。$\vec{k}$ はｚ方向の単位ベクトルである。$\vec{M}$ の時間変化を記述する方程式は、一般的にトルク方程式と呼ばれ

$$\frac{d\vec{M}}{dt}=\gamma\left(\vec{M}\times\vec{H}\right), \qquad (1)$$

で与えられる。（ただし、定数 $\gamma>0$ とする。）



１．式（１）の右辺の項を図示せよ。（解答用紙に上図を描き、これに書き加えよ。図は正確である必要はないが、ベクトルの向きがはっきりわかるように注意せよ。）

２．式（１）を成分に分解し $\vec{M}$ のｘ成分 M_x 、ｙ成分 M_y 、ｚ成分 M_z の時間変化を記述する方程式を書け。

３．M_x と M_y については得られた式は M_x と M_y が混ざっている。これらから、M_x については M_x だけを含む微分方程式、M_y については M_y だけを含む微分方程式を作れ。

４．M_z の微分方程式と、３で得られた M_x だけを含む微分方程式、M_y だけを含む微分方定式を解き、それぞれを時間の関数として表せ。ただし初期条件として、時刻ｔ＝０のとき上図のように $\vec{M}$ はｚ軸からｘ軸の方へ角度 ϕ だけ傾いているとする。また、このときの $\vec{M}$ の大きさを $\left|\vec{M}(0)\right|=M_0$ とする。

５．$\vec{M}$ の先端は、どのような運動をするか。また、$\vec{M}$ の大きさは時間変化するか。答えよ。

３．

ポテンシャル $V(\hat{x},\hat{y})=\dfrac{1}{2}m\omega^2(\hat{x}^2+\hat{y}^2)$ のもとで、xy 平面内を運動している質量 m、電荷 q の粒子について考えるため、以下に定義する演算子を導入する。

$$\hat{a}_i=\frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\left(\hat{p}_i-im\omega\hat{q}_i\right),\quad \hat{a}_i^\dagger=\frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\left(\hat{p}_i+im\omega\hat{q}_i\right),\quad (i=1,2)$$

ただし、$\hat{q}_1=\hat{x},\ \hat{p}_1=\hat{p}_x,\ \hat{q}_2=\hat{y},\ \hat{p}_2=\hat{p}_y$ である。

1. $[\hat{a}_i,\hat{a}_i^\dagger]=1$ を示せ。

2. この粒子のハミルトニアン $\hat{H}$ が、次のように書き換えられることを示せ。

$$\hat{H}=\left(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1+\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2+1\right)\hbar\omega$$

3. 基底状態 $|0\rangle$ は $\hat{a}_1|0\rangle=\hat{a}_2|0\rangle=0$ を満たす。n を自然数としたとき、$[\hat{a}_i^\dagger\hat{a}_i,(\hat{a}_i^\dagger)^n]=n(\hat{a}_i^\dagger)^n$ を示せ。

4. 前問の結果を用いて、第１励起状態のエネルギー固有値を求め、その独立なエネルギー固有状態を $|0\rangle$ と上で定義した演算子を用いて与えよ。ただし、固有状態は規格化する必要は無い。

5. この粒子の角運動量の z 成分 $\hat{L}_z$ は、$\hat{L}_z=i\hbar\left(\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1-\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2\right)$ と表されることを示せ。

6. $\hat{L}_z$ がハミルトニアン $\hat{H}$ と同時固有状態を持つことを示せ。

7. 前問の結果は、第１励起状態は、$\hat{L}_z$ の固有状態となることを意味する。第１励起状態には $\hat{L}_z$ の独立な固有状態がいくつあるかを答え、その内のひとつの固有状態とそれに対応する固有値を求めよ。

8. 新たに一様な電場 E を x 軸の正方向に加えると、x 軸方向の力の釣合の位置が移動する。このことに注目し、電場を加える前後での粒子のエネルギー固有値の変化を考える。エネルギー固有値の大きさとそれらの間隔、及びエネルギー固有値の縮退度の変化を答えよ。

４．

導体内に一様な電場 $\boldsymbol{E}$ が存在している。電子は電場 $\boldsymbol{E}$ によって加速され、導体を構成する原子との衝突によって減速される。原子との衝突によって単位時間に失う運動量はその時の運動量に比例し、ν を正の定数として $-\nu m\boldsymbol{v}$ と書けるとする。ただし、m は電子の質量、$\boldsymbol{v}$ は電子の速度である。

(1) 電子の電荷を e $(e<0)$ として、電子の運動方程式を書け。

(2) 定常状態での電子の速度 $\boldsymbol{v}$ を求めよ。(この速度は定常状態での電子の平均速度と考えることができる)

(3) 電子の数密度を n とする。電流密度 $\boldsymbol{i}$ と電場 $\boldsymbol{E}$ の間にオームの法則 $\boldsymbol{i}=\sigma\boldsymbol{E}$ が成り立つことを示し、σ を n、e、m、ν を用いて表せ。(σ は電気伝導度と呼ばれる)

次に、誘電率 ϵ、透磁率 μ の媒質中の電磁場について考える。

(4) 媒質中の電場 $\boldsymbol{E}$、磁束密度 $\boldsymbol{B}$ の満たすべきマクスウェル方程式は以下のように書ける。空欄 A、B、C に入るべき値 (式) を答えよ。ただし、電荷密度を ρ、電流密度を $\boldsymbol{i}$ とする。

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{E} = \boxed{\mathrm{A}} \qquad \mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = 0$$

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \boxed{\mathrm{B}} \qquad \mathrm{rot}\,\boldsymbol{B} - \epsilon\mu\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \boxed{\mathrm{C}}$$

(5) 媒質が電気的に中性 $(\rho=0)$ で、電流も存在しない場合、電場 $\boldsymbol{E}$ の満たすべき方程式を求めよ。必要なら $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = -\triangle\,\boldsymbol{E} + \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{E}$ が成り立つことを利用せよ ($\triangle$ はラプラシアン)。

(6) 前問で得た方程式は波動方程式であり、媒質中を電磁場が波として伝わることを示している。電磁波の伝播方向を x 軸にとって、時刻 t、位置 x での電場が $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0\exp(-i\omega t+ikx)$ と書けるとする。ただし、$\boldsymbol{E}_0$ は定数ベクトル、i は虚数単位、ω は角振動数、k は波数である。この時、k と ω の関係を求めよ。媒質中の電磁波の速さはどのように表されるか。

(7) 媒質が電気的に中性 $(\rho=0)$ で、(3) で求めたオームの法則 $\boldsymbol{i}=\sigma\boldsymbol{E}$ が成り立つ場合、電場 $\boldsymbol{E}$ の満たすべき波動方程式を求めよ。

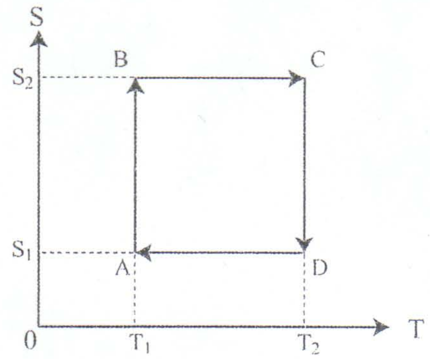
(8) 前問で、電磁波の伝播方向を x 軸にとり、時刻 t、位置 x での電場が $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0\exp(-i\omega t+i\gamma x)$ と書けるとする。ただし、$\boldsymbol{E}_0$ は定数ベクトル、i は虚数単位、ω は角振動数、γ はある複素定数である。この時、γ の満たすべき方程式を求めよ。

(9) 前問で得た方程式の解は $\gamma=\pm(\alpha+i\beta)$ (α と β はともに正の実数) と書ける。α と β を求めよ。

(10) $\sigma\gg\epsilon\omega$ の場合、電磁波は距離とともに指数関数的に減衰する。電磁波の振幅が 1/e になる距離を求めよ。減衰した電磁波のエネルギーはどのような形で散逸したか。

５.

理想気体に対して，温度–エントロピー線図上で $A \to B \to C \to D \to A$ で示されるようなサイクル過程を行った。ただし T は温度，S はエントロピーであり，すべての過程は準静的とする。



問１ $A \to B$，$B \to C$，$C \to D$，$D \to A$ の各過程はそれぞれ何という過程か，次の括弧の中から最も適切な過程を選んで答えなさい。

［等温膨張, 等温圧縮, 定圧膨張, 定圧圧縮, 定積加熱, 定積冷却, 断熱膨張, 断熱圧縮］

問２ $A \to B$，$B \to C$，$C \to D$，$D \to A$ の各過程について，理想気体が吸収した熱量をそれぞれ求めなさい。

問３ １回のサイクルで，外部から理想気体に加えられた仕事の総和を求めなさい。また，温度–エントロピー線図上で，この仕事の総和に等しい面積を図示しなさい。

常に一定の室温 T_2 におかれた，カルノー冷凍機で動作する冷蔵庫を考える。

問４ カルノー冷凍機が単位時間当たりの仕事 $\dot{W}$ で動作し，冷蔵庫内の温度が室温 T_2 よりも低い温度 T_1 に保たれているとき，単位時間当たりに冷蔵庫内から取り去っている熱量を $\dot{Q}_1$ とする。$\dot{Q}_1$ を $\dot{W}, T_1, T_2$ を用いて表しなさい。

問５ 冷蔵庫内へは，室温と冷蔵庫内の温度差に比例する熱量が流入する。すなわち，冷蔵庫内の温度が T のとき，単位時間当たりの熱量 $\dot{Q} = k(T_2 - T)$ が流入する。はじめに冷蔵庫内の温度が T_1 であり，時刻 $t = 0$ のときカルノー冷凍機を停止した場合，冷蔵庫内の温度 T の時間変化を求めなさい。ただし冷蔵庫内の比熱を C とし温度に依らず一定とする。

問６ カルノー冷凍機を停止してから，冷蔵庫内の温度が $\dfrac{T_1 + T_2}{2}$ に達するまでの時間が t_0 であった。この場合，冷蔵庫内の比熱 C を $T_1, T_2, \dot{W}, t_0$ を用いて表しなさい。

６．

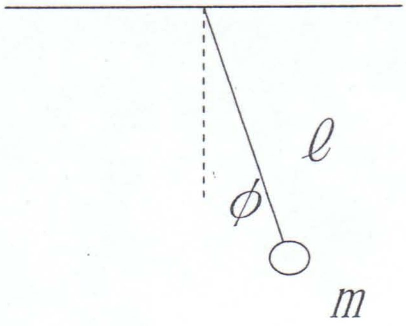


図１

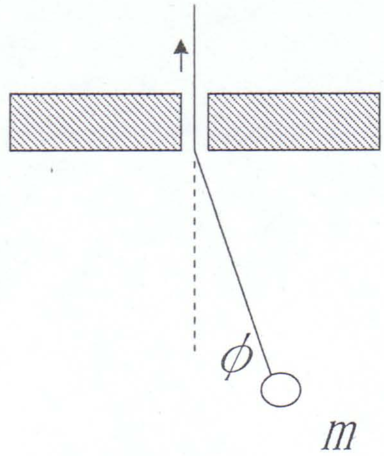


図２

図１のように、質量 m の小さなおもりを天井から長さ ℓ の糸でつるした。糸はたるまないとする。おもりは垂直面（紙面）内で運動している。糸の鉛直からの角度を ϕ とする。

(1) おもりの加速度を、糸の方向と、糸と垂直な方向に分けて、ϕ を使って書け。
(2) おもりの運動方程式を、糸の方向と、糸と垂直な方向に分けて、ϕ に関する微分方程式として書け。なお、糸の張力を T と書くこと。

(3) おもりの力学的エネルギー E を、ϕ および $\dot{\phi}$ を使って書け。

(4) ϕ が微小な場合、おもりの運動方程式を解いて、振動することを示せ。
振動数 ω を求めよ。

次に図２のように、天井に小さい穴をあけ、穴に糸を通して、糸をゆっくり引き上げる。ϕ は微小であるとする。

(5) おもりの運動は、図１の場合に比べて、速くなるか、遅くなるか、同じか。理由も述べよ。

(6) ϕ が微小である時、(3) で求めたエネルギーE を、ϕ の２次まで展開を行え。また、おもりの運動に比べて、糸を引き上げる速度はゆっくりであることから、おもりの運動を時間平均せよ。結果は $\langle\phi^2\rangle$ を使って書くこと。

(7) 糸の長さが $\delta\ell$ だけ変化した時の、張力 T のした仕事を求めることにより、系のエネルギー変化 δE を求めよ。
(8) 位置エネルギーの基準点を、振動の最下点にした時のエネルギーを E' とする。
$\delta E'/E'$ と $\delta\omega/\omega$ の間にどのような関係があるか？