平成２０年度博士前期課程　IIIコース　２次募集　入試問題

１.

高さ h から速さ $v_0(>0)$ で質量 m の質点を鉛直下方に投射した．時間 $t(>0)$ での地面からの質点の高さを x とし，速度を v (上向きを正とする)とする．質点は速度に比例した空気抵抗 $-\kappa v$ を受けるとする．重力は一様であるとし，重力加速度を g とする．h は十分大きいとする．

(1) 質点の運動方程式を求めよ．

(2) (1)を解いて，速度 v と高さ x を時間 t の関数で示せ．

時間が十分に経過し，一定の速度で質点が落下しているとする．

(3) 質点の力学的エネルギー E を求めよ．

(4) 空気抵抗が質点にした仕事を W としたとき，仕事率 $\mathrm{d}W/\mathrm{d}t$ を速度 v などを用いて求めよ．

(5) 系のエネルギー E は保存するか？ 理由についても説明せよ．

平成２０年度博士前期課程　III コース　２次募集　入試問題
２．

Bohr は、水素原子について、原子核のまわりを１個の電子が電磁波を発生させること無く一定の速さで円運動をしているが、古典力学的に可能な運動のうち、特殊な条件―「量子条件」を満足するものだけが許されると考えた。水素原子核と電子の質量をそれぞれ m_{H}、m_{e} とし、電荷を $+e$, $-e$ とする。また、電子の円運動の半径を L、速さを v とする。

原子核は固定されている（動かない）ものとして、以下の問１～4 に答えよ。

問1.　原子核と電子の間の静電引力と円運動による遠心力とのつりあいの式を、m_{e}, v, L, e を用いてあらわせ。

問2.　量子条件とは、電子の角運動量 p_θ が回転角 θ の一周期（一回転）関して、

$$\oint p_\theta d\theta = nh \qquad (n = 1,2,3,\cdots)$$

を満足しなければならないというものであった。h はプランク定数である。
この条件によって許される電子の角運動量 p_θ を、n を用いてあらわせ。

問3.　各 n の値に対する電子の円運動の半径 L_n を求め、電子の運動エネルギーを L_n, e を用いてあらわせ。

問4.　ある n の運動状態に対応する全エネルギー E_n は、$E_n = -R_{\mathrm{H}}/n^2$ （R_{H} は定数）と表すことができる。定数 R_{H} が（$m_{\mathrm{e}} \times e^4$）に比例することを示せ。

Bohr は、量子条件を満たす運動状態を定常状態と名づけ、水素原子の発光スペクトルは、エネルギーの高いある定常状態（n, E_n）から低い定常状態（n', $E_{n'}$）に飛び移る（遷移）時にそのエネルギー差を光子として放出することで観測されると考えた。このときの光の振動数を ν とすると、振動数は、

$$\nu = R_{\mathrm{H}}\left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

で表され、原子スペクトルの測定から定数 R_{H} の実験値が求まる。

一方、より良い定数 R_{H} の理論値を得るためには、重心のまわりを電子と原子核が回転運動する２体問題として扱わなければならないが、その場合は、電子の質量 m_{e} を換算質量 $\mu_{\mathrm{H}} = m_e m_{\mathrm{H}}/(m_e + m_{\mathrm{H}})$ に置き換えればよいことがわかった。以下の問５，６に答えよ。

問5.　重水素原子（D または ^{2}H）の原子核の質量を m_{D} とする。水素原子と重水素原子に対する定数 R_{H} と R_{D} の比、$R_{\mathrm{D}}/R_{\mathrm{H}}$ が次式であらわせることを示せ。

$$\frac{R_{\mathrm{D}}}{R_{\mathrm{H}}} = \left(1 + \frac{m_e}{m_{\mathrm{H}}}\right)\frac{1}{1 + \dfrac{m_{\mathrm{H}}}{m_{\mathrm{D}}}\dfrac{m_e}{m_{\mathrm{H}}}}$$

問6.　$m_{\mathrm{e}}/m_{\mathrm{H}} = 0.00055$ および $m_{\mathrm{D}}/m_{\mathrm{H}} = 2$ とする。$R_{\mathrm{D}}/R_{\mathrm{H}}$ の値を小数点以下４桁まで求めよ。

３．

図１のように容量 C_A[F]のコンデンサー C_A と、容量 C_B[F]のコンデンサー C_B の回路がある。これに電圧 V_0 [V]の定電圧電源が接続されている。電源と C_A の間にはスイッチＳＷ１と抵抗 R[Ω]の抵抗Ｒが接続されており、また、C_A と C_B の間にはスイッチＳＷ２とインダクタンス L [H]のコイルＬが接続されている。

始め、２つのスイッチは共に開いている。また、電源と、コイルと、コンデンサーの内部抵抗は無視できるとして、以下の問いに答えよ。

まず、ＳＷ２を開けたまま、ＳＷ１を閉じて、コンデンサー C_A を充電する。

（１）このとき回路に流れる電流の最大値を求めよ。

（２）C_A が約９５％の電圧になるまでの時間を求めよ。ただし、$1/e^3$＝約 0.05 である。

十分な時間が経つと C_A は１００％充電された。

（３）C_A に蓄えられた電荷 Q_0[C]と、エネルギーをそれぞれ求めよ。

（４）C_A の充電が終るまでにＲで消費されるエネルギーを求めよ。

１００％充電された状態でＳＷ１を開けて、ＳＷ２を閉じた。すると C_A に蓄えられた電荷は C_B に移ったり、戻ったりし始めた。ＳＷ２を閉じてから t 秒後に C_B に蓄えられる電荷を $q(t)$[C]とするとき、以下の問いに答えよ。

（５）$q(t)$の満たすべき微分方程式を求めよ。

（６）$q(t)$が満たすべき初期条件をすべて書け。

（７）微分方程式の解を求めよ。

（$q(t)$を sin と cos の関数、および定数の和の形に仮定する。）

（８）$q(t)$の振動の周期を求めよ。

（９）C_B に発生する最大電圧を求めよ。

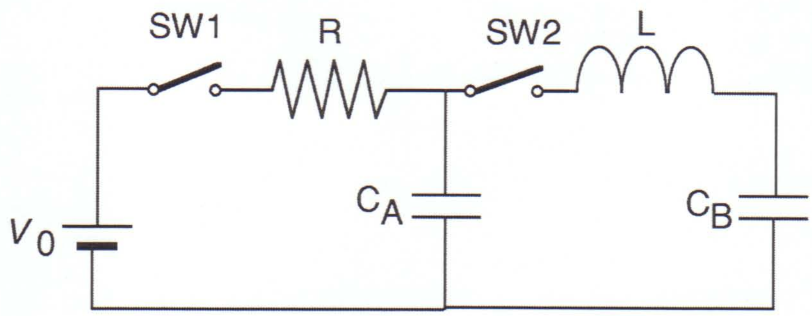


図１

４．

地球の中心に原点を置く座標系 O'-$x'y'z'$ は慣性座標系と見なしてよく、これに対して、地球表面の座標系 O-xyz は、地球が自転しているため運動座標系（非慣性座標系）である。質点の O'-$x'y'z'$ 系での位置ベクトルを $\boldsymbol{r}'$、O-xyz 系では $\boldsymbol{r}$、 O（ O-xyz 系の原点）の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_0$ とすれば以下の関係がある。

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{r}$$

質量 m の質点に外力 $\boldsymbol{F}$ が働いたときの慣性座標系 O'-$x'y'z'$ での運動方程式は

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}'}{dt^2} = \boldsymbol{F}$$

であり、これを O-xyz 座標系で書けば①式になる。

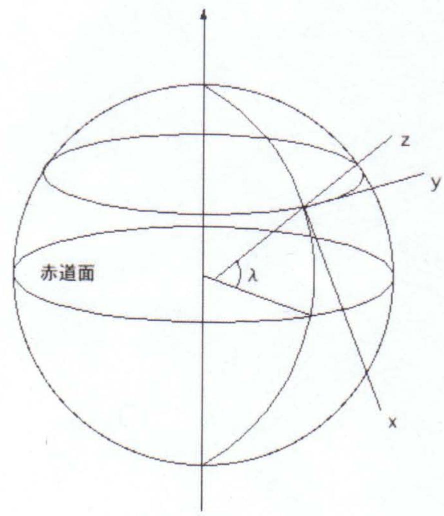
$$m\frac{d^{*2}\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{F} - m\frac{d^2\boldsymbol{r}_0}{dt^2} - 2m\left(\boldsymbol{\omega}\times\frac{d^*\boldsymbol{r}}{dt}\right) - m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}) - m\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r} \qquad ①$$

ここで、 $\dfrac{d^*\boldsymbol{r}}{dt}$ は $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ において基本ベクトル $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ は微分せず x, y, z だけを微分することを意味する。

$\boldsymbol{\omega}$ は地球の自転の角速度ベクトルであり、その大きさは ω である。

(1) ①式を導きなさい。

(2) ①式の右辺の外力 $\boldsymbol{F}$ 以外の各項は何による見かけの力か説明しなさい。



図のように地球表面に鉛直上方を z 軸、これに垂直な水平面で南方へ x 軸、東方へ y 軸をとる。鉛直線が赤道面となす角（地理緯度）は λ であり、質量 m の質点には z 軸下方に見かけの重力 $-mg$ が働く。

地球表面近くに設置された、ひもの長さ l、おもりの質量 m の振り子の運動について答えなさい。振り子の振幅は小さく、ひもはたるまない。また、おもりは十分小さく、振り子の振動によるおもりの z 位置は一定と近似して良い。

(3) 地球表面座標系でのおもりの運動方程式を x 軸方向、y 軸方向に分けて記述しなさい。

(4) (3)の運動方程式において　$\omega' = \omega\sin\lambda$ 、$\omega_0{}^2 = g/l$　、　$\zeta = x + iy$
とおいて ζ に関する微分方程式を作り、この微分方程式の解を求めなさい。

５．

非常に小さい周囲の長さが L の円形の導線を、抵抗なく流れる電流について考える。導線中の伝導電子を、ポテンシャルの力を受けない電子（自由電子）と考え、また、その運動が１つの波動関数で表される量子力学に従うものと仮定しよう。導線の領域を $x(0 \leq x < L)$、電子の質量を m、電子の電荷を e として、以下の問に答えよ。

1. 電子の波動関数 $\psi(x,t)$ を用いて、電子の電荷密度 $\rho(x,t)$ を与えよ。

2. 電荷の保存則を、電荷密度 $\rho(x,t)$ と電流密度 $j(x,t)$ を用いて表せ。またそのように表される理由を簡潔に述べよ。

3. 電流密度 $j(x,t)$ は、
$$j(x,t) = \frac{e\hbar}{2mi}\left[\psi^*(x,t)\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x} - \psi(x,t)\frac{\partial\psi^*(x,t)}{\partial x}\right]$$
で与えられる。このとき、2. で答えた電荷の保存則が実際に成り立っていることを示せ。

4. 定常状態の波動関数を
$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$
とする。このときの電流密度を求めよ。

5. 波動関数 $\psi(x)$ の満たすべき境界条件を与えよ。

6. 基底状態は $k=0$、即ち $\psi(x) =$ 一定、の状態である。第１励起状態のエネルギー固有値を求めよ。またその状態は何重に縮退しているか。

7. 次に、導線が $x=0$ のところで切れていて、そこに非常に薄い絶縁体の膜が挟まっている場合について考える。古典論では電流が流れない状況でも、量子論ではトンネル効果によって電流が流れうる。絶縁体の膜の厚みは無視できるものとして、導線の領域を $x(0 \leq x \leq L)$ で表すことにする。

   今、絶縁体の影響を $x=0$ に局在したポテンシャル
$$V(x) = S\delta(x) \qquad (S > 0)$$
で表したとき、定常状態の波動関数 $\psi(x)$ は次の境界条件を満たすことを示せ。
$$\psi'(0) = \psi'(L) + \frac{2mS}{\hbar^2}\psi(0)$$

６．

統計力学量 x は、最も確からしい値 (平均値) から温度効果 (例えば、気体分子の運動エネルギー変化) により常に変化していると考えられる。ここでは、この平均値からの変化量の大きさをゆらぎと呼ぶ。x についてはこのゆらぎを Δx と書き、

$$\Delta x \ = \ \sqrt{\langle\, (x - \langle x \rangle)^2 \,\rangle}$$

の式で評価されるとしよう。ただし、記号 $\langle\ \rangle$ は何らかの計算式で定義された平均値を表すものとする。

(1) $(\Delta x)^2$ を $\langle x^2 \rangle$ および $\langle x \rangle$ を用いて表せ。

(2) 微視状態 i の内部エネルギーを E_i として、正準集団 (カノニカルアンサンブル) を用いて、系の分配関数 Z を書け。ただし、ボルツマン因子を k_{B} とし、温度 T のとき、その代わりとして $\beta(= 1/k_{\mathrm{B}}T)$ を用いよ。

(3) 系の内部エネルギーの平均値を書け。

(4) $\frac{\partial^2 Z}{\partial \beta^2}$ を求めよ。

(5) 比熱 C を求めよ。

(6) ゆらぎを用いて、C を書け。