平成２１年度　金沢大学大学院自然科学研究科
数物科学専攻IIIコース物理学試験問題　（２次）

1.　図１のように摩擦がないレール上に大きさの無視できる質量 m の物体が３つおかれている。それぞれの平衡位置からの変位を x_1, x_2, x_3 とする。物体間にはバネ定数 k のばねが、また各物体もバネ定数 k のバネで固定点に結ばれている。３つの固有振動（基準振動）の角振動数と、その固有振動に伴う各物体の振動の変位を計算したい。以下の問いに答えよ。

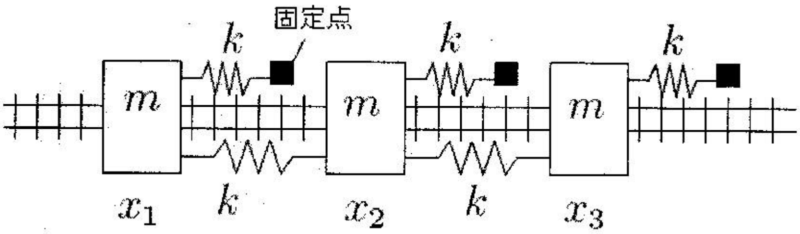

図 1.

問１.　この系を記述するラグランジアンを求めよ。

問２.　３つの物体の運動方程式をそれぞれ求めよ。

次に３つの固有振動（基準振動）の角振動数を求める。問２で求めた運動方程式は、このままでは解けない。$y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3$ という線形変換（直交変換）により、新たな変数 y_1, y_2, y_3 へ移行し、その座標系での運動方程式を考える。

問３.　そのうちの１つ、$y_1 = x_1 + x_2 + x_3$ について、y_1 の満たす運動方程式を書け。（ヒント：y_1 を時間で２回微分せよ。）これは変数 y_1 だけの式になっている。固有角振動数 ω_1 を求めよ。

前問では $\vec{x} = (x_1,\ x_2,\ x_3)$ の混成に $\vec{a}_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{13}) = (1,\ 1,\ 1)$ を用い、y_1 だけの運動方程式を得た。固有角振動数 ω_2 を求めるには新変数 y_2 の満たす運動方程式が y_2 だけの式になっている必要がある。もし $\vec{a}_2 = (a_{21}, a_{22}, a_{23})$ が $\vec{a}_1$ の成分を含むと、y_2 の運動方程式は ω_1 で振動する y_1 の運動方程式を含むので、y_2 だけの式にならない。よって、$\vec{a}_2$ は $\vec{a}_1$ の成分を含まず、直交する。まとめて、$\vec{a}_1$、$\vec{a}_2$、$\vec{a}_3$ は互いに直交している。

問４.　残りの変数 y_2, y_3 への変換のためのベクトル $\vec{a}_2, \vec{a}_3$ を考え、固有角振動数 ω_2, ω_3 を求めよ。

問５.　x_1, x_2, x_3 それぞれを問３、問４で用いた y_1, y_2, y_3 で表せ。

平成２１年度　金沢大学大学院自然科学研究科
数物科学専攻IIIコース物理学試験問題　（２次）

2.　図2に示すように，半径a，厚みw ($w \ll a$)の金属円板Aを考える。端の効果は無視し，電場は円板に直角な方向だけにできるとする。

問1.　この金属円板Aに電荷Q ($Q > 0$)を与えた時の中心軸上の電場Eを求めなさい。図のように円板の中心軸をX軸にとり，電場Eをxの関数としてグラフに表しなさい。

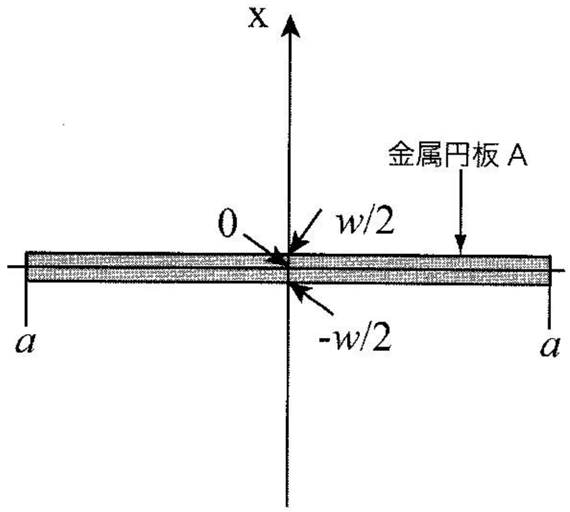

図 2: 中心軸のとり方

同形の金属円板Bの中心をX軸上$x = d$ ($w < d \ll a$)の位置にとり，金属円板Aと平行に置く。金属板は二つとも接地されていないとする。

問2.　金属円板Aにだけ電荷Qを与える，この時のX軸上の電場を求めなさい。

問3.　金属円板AにQ，金属円板Bに$-Q$の電荷を与えた時の，各金属板での電荷分布について述べなさい。また，X軸上の電場を求めなさい。

問4.　金属円板Aの電荷を$+Q\sin(\omega t)$，金属円板Bの電荷を$-Q\sin(\omega t)$となるように時間的に変化させる（ωは定数)。このとき，円板間に生じる磁場を求めなさい。また，時間的に変化する磁場の最大値をX軸からの距離rの関数としてグラフにしなさい。

平成２１年度　金沢大学大学院自然科学研究科
数物科学専攻 III コース物理学試験問題　(２次)

3.　準静的微小変化において，系が吸収する微小熱量 dQ，系にされる微小仕事 dW，内部エネルギー U の微小変化 dU の関係は，熱力学第一法則から次の様に表される。

$$dU = dQ + dW \tag{1}$$

温度 T，エントロピー S，圧力 p，体積 V，およびこれらの変化量を dT, dS, dp, dV と表す。dQ および dW はそれぞれ，

$$dQ = \boxed{(ア)}\ d\ \boxed{(イ)} \tag{2}$$

$$dW = \boxed{(ウ)}\ d\ \boxed{(エ)} \tag{3}$$

と表される。

問 1 (ア)〜(エ) に入る熱力学変数を符号を含めて書きなさい。

問 2 内部エネルギー U を温度 T と体積 V の関数と考え，内部エネルギーの変化量 dU を偏微分係数で表し，式 (1)〜(3) を用いると，次の式が成立することを示しなさい。

$$dS = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \frac{1}{T}\left\{\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right\} dV \tag{4}$$

問 3 式 (4) から次の関係式が成立することを示しなさい。

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p \tag{5}$$

状態方程式 $pV = RT$ が成立する理想気体１モルについて考える。R は気体定数である。

問 4 この気体の内部エネルギー U は体積 V に依存しないことを示しなさい。

問 5 内部エネルギー U が，$U = \dfrac{3}{2}RT$ と表されるとき，この気体のエントロピー S を温度 T と体積 V で表しなさい。

問 6 準静的断熱過程では，温度 T と体積 V は $T^A V =$ 一定 の関係が成立する。定数 A を求めなさい。

平成２１年度　金沢大学大学院自然科学研究科
数物科学専攻IIIコース物理学試験問題　(２次)

４．　時間に依存しないベクトルポテンシャル $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ の中での質量 m、電荷 e の荷電粒子の量子力学的運動を考える。この粒子のハミルトニアン演算子 $\hat{H}$ は、力学的運動量演算子 $\hat{\Pi}_i = \hat{p}_i - \frac{e}{c}A_i(\mathbf{x})$ $(i = x, y, z)$ を用いて

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{\mathbf{\Pi}}^2$$

で与えられる。以下の問に答えよ。

問１ z 方向に強さ B の一様磁場がある場合には、ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ は

$$A_x = -\frac{B}{2}y, \quad A_y = \frac{B}{2}x, \quad A_z = 0$$

と書けることを示せ。

問２ 座標表示での正準運動量演算子が $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla$ であることを考慮し、上で導入された力学的運動量演算子 $\hat{\Pi}_i$ の交換関係 $[\hat{\Pi}_i, \hat{\Pi}_j]$ を計算し、その結果を磁場 $\mathbf{B}$ を用いて表せ。

以下の問では、z 方向に強さ B の一様磁場がある場合を考える。

問３ 演算子 $\hat{\alpha}$ と $\hat{\alpha}^\dagger$ を

$$\hat{\alpha} = \sqrt{\frac{c}{2\hbar eB}}(\hat{\Pi}_x + i\hat{\Pi}_y), \qquad \hat{\alpha}^\dagger = \sqrt{\frac{c}{2\hbar eB}}(\hat{\Pi}_x - i\hat{\Pi}_y)$$

と定義する。交換関係 $[\hat{\alpha}, \hat{\alpha}^\dagger]$ を計算せよ。

問４ ハミルトニアン $\hat{H}$ が、$\hat{\alpha}$ と $\hat{\alpha}^\dagger$ を用いてどのように表されるかを示せ。

問５ $\hat{\alpha}$ と $\hat{\alpha}^\dagger$ の交換関係と、問４で求めたハミルトニアンの構造に注目して、この粒子のエネルギー固有値を求めよ。