平成２２年度　金沢大学大学院自然科学研究科
数物科学専攻IIIコース
入学試験

物理学

試験の注意

1. 問題は４問（6枚）、答案用紙は４枚、下書き用紙は１枚。

2. 解答は、問題ごとに指定の答案用紙を使用すること。

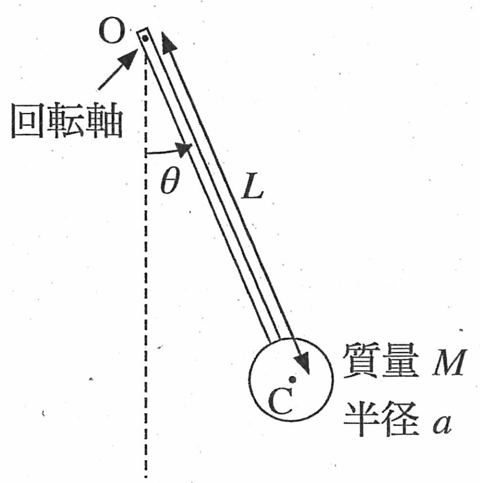
3. スペースが足りない場合は、裏面を使用してもよい。ただしこの場合、裏に続くことを明記し、表面の解答範囲と同様の高さから書き始めること。

4. 白紙の答案でも、受験番号を明記して提出すること。

平成２２年度　金沢大学大学院自然科学研究科
数物科学専攻 III コース物理学試験問題

1.

図に示すように、質量の無視できる棒の先に半径 a、質量 M の密度が均一な球を取りつけ、もう一方の端点 O を通って棒に垂直な軸を回転軸とした振り子の運動を考える。O から球の中心 C までの距離を L、回転軸のまわりの振り子の慣性モーメント (慣性能率) を I、重力加速度を g、鉛直方向からの角度を θ とする。時刻 $t = 0$ に $\theta = \theta_0$ の位置で振り子を静かに離した。次の各問いに答えよ。



まず最初に、摩擦がない場合を考える。

(1) 振り子の運動方程式を書け。

(2) θ が微小角であるとして問 (1) で求めた運動方程式を解き、初期条件を満たす解を求めよ。

(3) 微小振動の際の振り子の周期を求めよ。

(4) 問 (3) で求めた周期と、質量 M、長さ L の単振り子の微小振動の周期を比較し、どちらが長いか答えよ。ただし、半径 a の密度が均一な球の、直径のまわりの慣性モーメントは $\frac{2}{5}Ma^2$ である。

次に、回転軸で運動摩擦力が働く場合を考える。回転軸のまわりの運動摩擦力のモーメントが角速度 $\dot{\theta}$ に比例するとし、その比例定数を k (ただし $k < \sqrt{4IMgL}$) とする。回転軸のまわりの振り子の慣性モーメントは I を使用せよ。

(5) 振り子の運動方程式を書け。

(6) θ が微小角であるとして問 (5) で求めた運動方程式を解き、初期条件を満たす解を求めよ。

平成２２年度　金沢大学大学院自然科学研究科
数物科学専攻III コース物理学試験問題

2.

磁気モーメントを持つ小磁石が遠方に作る磁場は、閉電流が遠方に作る磁場と等価であることが知られている。いま、図１のように閉回路 C の中を強さ I の定常電流が流れていると考える。以下の問いに答えよ。

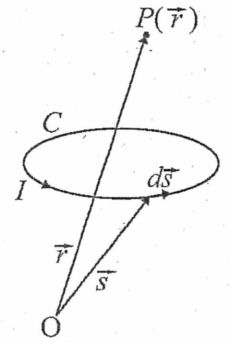


図１

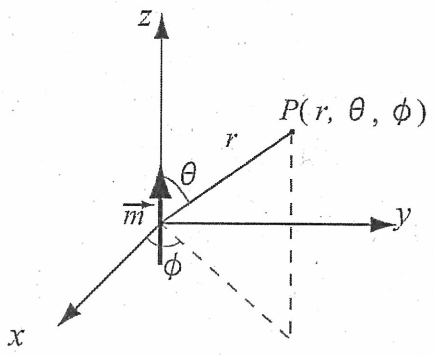


図２

(1) 図１に示すように閉回路上の位置 $\vec{s}$ での電流素片が $Id\vec{s}$ のとき、観測点 $P(\vec{r})$ でのベクトルポテンシャル $\vec{A}$ を閉回路 C に関する線積分 $\oint_c$ を用いて表せ。真空の透磁率は μ_0 とする。

(2) 観測点 $P(\vec{r})$ が閉回路 C から十分に遠く離れているとき、ベクトルポテンシャル $\vec{A}$ は、$\vec{A} = \dfrac{\mu_0 I}{8\pi|\vec{r}|^3}\oint_c(\vec{s}\times d\vec{s})\times\vec{r}$ と近似できることを示せ。ただし、$\oint_c(\vec{r}\cdot\vec{s})d\vec{s} = \dfrac{1}{2}\oint_c(\vec{s}\times d\vec{s})\times\vec{r}$ の関係を用いよ。

(3) 遠方において、この閉電流が作る磁場と等価な磁場を作る小磁石の磁気モーメントは $\vec{m} = \dfrac{\mu_0 I}{2}\oint_c(\vec{s}\times d\vec{s})$ であるので、問 (2) で近似されたベクトルポテンシャ

ルは $\vec{A} = \dfrac{1}{4\pi}\dfrac{\vec{m}\times\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$ と書ける。これから、観測点 $P(\vec{r})$ での磁束密度は $\vec{B} = \dfrac{1}{4\pi}\left(-\dfrac{\vec{m}}{|\vec{r}|^3}+\dfrac{3\vec{r}(\vec{m}\cdot\vec{r})}{|\vec{r}|^5}\right)$ になることを示せ。

(4) 図 2 のように、磁気モーメント $\vec{m}$ の位置を原点とし、その方向を z 軸とする極座標をとる。観測点 $P(r,\theta,\phi)$ における磁束密度の r 成分は $B_r = \dfrac{|\vec{m}|\cos\theta}{2\pi|\vec{r}|^3}$ になることを示せ。

次に, 図 3 のように z 軸を中心軸とした半径 a の単巻き円形コイルを、原点に置かれた磁気モーメント $\vec{m}$ を持つ小磁石から十分離れた位置 z に置く。ただし、コイルの半径はコイルと小磁石の距離に比べて十分小さいとする $(a^2/z^2 \ll 1)$。

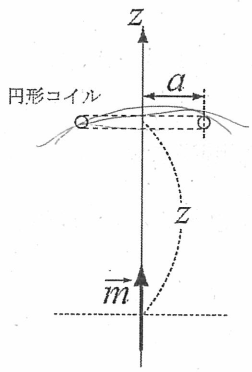


図 3

(5) 問 (4) の結果を利用し、円形コイルを貫く磁束を求めよ。

(6) 円形コイルが z 軸上を速さ v で移動するとき、円形コイルに発生する起電力の大きさを求めよ。

平成２２年度　金沢大学大学院自然科学研究科
数物科学専攻 III コース物理学試験問題

3.

フェルミ統計，あるいは, ボーズ統計に従う粒子の集団ついて以下の問に答えよ。量子力学的状態 i にある粒子数を n_i，i 状態のエネルギーを ε_i, 化学ポテンシャルを μ とすると, 大正準集団の大分配関数 Ξ は以下のように与えられる。

$$\begin{aligned}\Xi &= \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{\Sigma n_i = N} \exp(-\frac{1}{k_B T}\sum_i (\varepsilon_i - \mu) n_i) \\ &= \prod_i \sum_{n_i} \exp(-\frac{\varepsilon_i - \mu}{k_B T} n_i)\end{aligned}$$

ここで、$\displaystyle\sum_{\Sigma n_i = N}$ は $N = \Sigma n_i$ がある一定値をとるときに現れるすべての微視的状態について和をとることを意味する。

(1) ボーズ粒子, フェルミ粒子について n_i はそれぞれどのような値をとるか答えよ。

(2) ボーズ粒子, フェルミ粒子の大分配関数 Ξ_B, Ξ_F は 1 粒子状態 i において許される n_i の値について和をとることによって，それぞれ次のように表されることを示せ。

フェルミ粒子：$\Xi_F = \prod_i (1 + e^{-(\varepsilon_i - \mu)/k_B T})$

ボーズ粒子：$\Xi_B = \prod_i (1 - e^{-(\varepsilon_i - \mu)/k_B T})^{-1}$

(3) フェルミ粒子の場合に，1 粒子状態 j をとる粒子数の平均値 $\langle n_j \rangle_F$ を求めよ。

(4) 問 (3) で求めた関数 $\langle n_j \rangle_F$ の名前を答えよ。

(5) 問 (3) で求めた関数 $\langle n_j \rangle_F$ をエネルギー ε の関数として絶対零度と有限温度 T の場合について図示せよ。

(6) ボーズ粒子の場合に，1 粒子状態 j をとる粒子数の平均値 $\langle n_j \rangle_B$ を求めよ。

(7) フェルミ粒子とボーズ粒子が, 粒子数密度が小さく, 温度が高い極限で 1 粒子状態 j をとる粒子数の平均値 $\langle n_j \rangle$ を求めよ。

平成２２年度　金沢大学大学院自然科学研究科
数物科学専攻IIIコース物理学試験問題

4.

1次元調和振動子のハミルトニアン $\hat{H}$ は、運動量演算子 $\hat{p}$ と座標演算子 $\hat{x}$ を用いて

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2\hat{x}^2}{2}$$

のように記述される。ここで m は調和振動子の質量、ω は角振動数である。

消滅演算子 $\hat{a}$、生成演算子 $\hat{a}^\dagger$ を次のように定義する。

$$\hat{a} \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} + \frac{i}{m\omega}\hat{p}\right), \quad \hat{a}^\dagger \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} - \frac{i}{m\omega}\hat{p}\right).$$

以下の問いに答えよ。必要ならばガウス積分の公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \ ,$$

を使用せよ。

(1) ハミルトニアンを生成演算子、消滅演算子を用いて書き換えよ。

(2) 交換関係 $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger]$, $[\hat{H}, \hat{a}]$, $[\hat{H}, \hat{a}^\dagger]$ を計算せよ。

(3) ハミルトニアン $\hat{H}$ の任意の固有値を $\lambda\hbar\omega$, それに対応する固有関数を $\psi_\lambda(x)$ と表した場合に、$\hat{a}\psi_\lambda(x)$ と $\hat{a}^\dagger\psi_\lambda(x)$ もハミルトニアン $\hat{H}$ の固有関数であることを示し、その固有値をそれぞれ求めよ。ただし $\hat{a}\psi_\lambda(x) \neq 0$ とする。

(4) 基底状態の固有関数を $\psi_{\lambda_0}(x)$ とした場合 $\psi_{\lambda_0}(x) \neq 0$, $\hat{a}\psi_{\lambda_0}(x) = 0$ となる。この条件から規格化された $\psi_{\lambda_0}(x)$ とその固有値を求め、固有関数をグラフに図示せよ。

(5) 次のように $\Delta\hat{x} = \hat{x} - \langle\hat{x}\rangle$, $\Delta\hat{p} = \hat{p} - \langle\hat{p}\rangle$ を定義するとき、基底状態の固有関数に対して $\sqrt{\langle(\Delta\hat{x})^2\rangle\langle(\Delta\hat{p})^2\rangle}$ を計算せよ。ここで $\langle\hat{A}\rangle$ は演算子 $\hat{A}$ の期待値である。

(6) この1次元調和振動子ポテンシャルの中で運動している多数のスピン 1/2 のフェルミ粒子があるとする。粒子間に相互作用は無いとして、粒子数が $2N$ のときの基底状態のエネルギーを求めよ。