

平成22年度 金沢大学大学院自然科学研究科
数物科学専攻IIIコース
入学試験（2次）

物理学

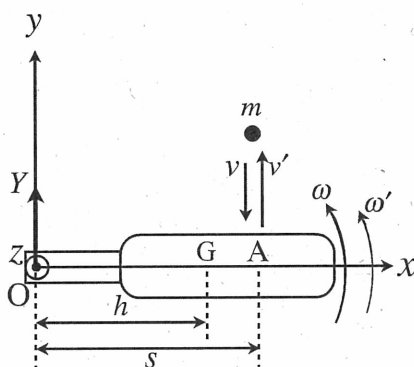
試験の注意

1. 問題は4問（4枚）、答案用紙は4枚、下書き用紙は1枚。
2. 解答は、問題ごとに指定の答案用紙を使用すること。
3. スペースが足りない場合は、裏面を使用してもよい。ただしこの場合、裏に続くことを明記し、表面の解答範囲と同様の高さから書き始めること。
4. 白紙の答案でも、受験番号を明記して提出すること。

平成22年度 金沢大学大学院自然科学研究科
数物科学専攻 III コース物理学試験問題 (2次)

1.

図に示すように、原点 O を通る z 軸に端点を固定された質量 M のバットがある。バットは O - xy 面内で自由に回転できるものとする。バットの重心を G 、 O から重心までの距離を $\overline{OG} = h$ とする。 G を通り O - xy 面に垂直な軸のまわりのバットの慣性モーメントは I_G である。いま、角速度 ω で回転するバットが x 軸を通過する瞬間に、バット上の点 A ($\overline{OA} = s$) に、質量 m のボールが y 軸の正の方向から速さ v で垂直に当たり、逆向きに跳ね返った。ボールとバットのあいだの反発係数を e とする。ボールおよびバットの重心はそれぞれ O - xy 面内で運動するものとし、ボールの大きさおよびバットの厚みは無視できるものとする。以下の問いに答えよ。



(1) バットの z 軸まわりの慣性モーメント I を I_G, M, h を用いて表せ。

以下、バットの z 軸まわりの慣性モーメントとして I を使用せよ。

(2) 衝突後のボールの速さを v' 、バットの回転角速度を ω' とする。衝突の間にボールに働く力積を $\int F dt$ とする。

(a) 衝突の前後で、バット上の点 A に対するボールの相対速度が満たす関係を書け。

(b) 衝突の前後で、ボールの運動量が満たす関係を書け。

(c) 衝突の前後で、バットの角運動量が満たす関係を書け。

(3) 問(2)で表した3つの式から $\int F dt$ を消去し、衝突後のボールの速さ v' 、およびバットの回転角速度 ω' をそれぞれ求めよ。

(4) 衝突の間に回転軸に働く抗力を Y とする。バットの重心運動について運動量変化の満たすべき関係式を、衝突の間にボールに働く力積 $\int F dt$ 、抗力 Y の力積 $\int Y dt$ 、衝突後のバットの回転角速度 ω' を用いて表せ。

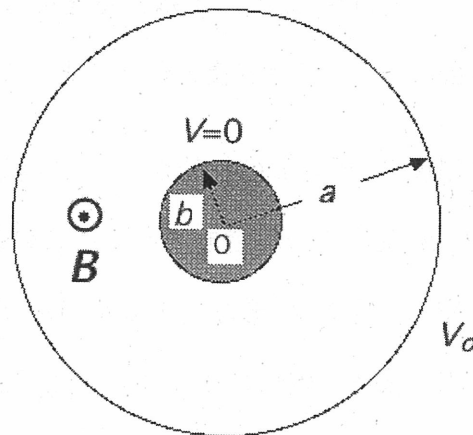
(5) 抗力 Y の力積が0となるときの点 A の位置を求めよ。

平成22年度 金沢大学大学院自然科学研究科
数物科学専攻 III コース物理学試験問題 (2次)

2.

接地された半径 b の円柱状の陰極が、半径 $a (> b)$ の円筒状の陽極内に中心軸を一致して置かれている。両者は十分に長いとする。図はその断面である。

陽極に電圧 V_0 をかけ、軸方向に磁束密度 B の一様な磁場をかける。以下では電子が図の平面内で運動する場合のみを考える。中心軸の位置 O を原点とした極座標 (r, θ) をとり、中心から r の距離の電位を $V(r)$ とし、陰極面 ($r = b$) から出た電子の運動を考える ($b \leq r \leq a$)。電子の質量を m 、電荷を $-e$ とする。



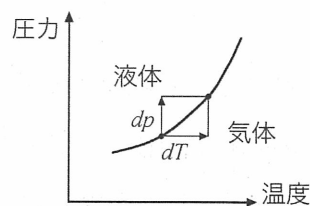
- (1) 電子の運動エネルギーを、時刻 t における電子の座標 $r(t), \theta(t)$ とその導関数 $\dot{r}, \dot{\theta}$ のうち必要なものを用いて表せ。
- (2) 陰極面から速度0で出発した電子が位置 (r, θ) を通過するとき持つ運動エネルギーを $V(r)$ を用いて表せ。
- (3) 位置 (r, θ) を通過するときの電子にはたらく、 O を中心とする力のモーメントの大きさを $r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}$ のうち必要なものを用いて求めよ。
- (4) 陰極面から速度0で出発した電子が位置 (r, θ) で持つ角運動量の大きさを r の関数として表せ。
- (5) 陰極面から速度0で出発した電子の座標 r の値は、磁場の強さに応じて決まるある一定の値以上にはなれない。電子が陽極に到達するために必要な V_0 の条件を求めよ。(ヒント： $\dot{r} = 0$ になるのは電子が最大の動径座標に達するときである。)

平成22年度 金沢大学大学院自然科学研究科
数物科学専攻 III コース物理学試験問題 (2次)

3.

純物質が液体と気体の2相共存状態にある場合について次の問に答えよ。

- (1) この系で独立にとれる状態変数の数を答えよ。
- (2) “ある温度 T , 圧力 p の時に気相と液相で等しい値を持つのは, この2つの熱力学変数以外には $\boxed{(1)}$ である。温度が dT , 圧力が dp 変化したときに $\boxed{(1)}$ の変化分は $\boxed{(2)}dT + \boxed{(3)}dp$ と書ける。” (1)~(3) に当てはまる適切な語句や物理量を答えよ。式中で文字を用いる場合には, 文字の定義を書くこと。
- (3) 図のように共存状態にある温度 T , 圧力 p の状態から, 共存状態を保ちながら温度と圧力がそれぞれ微小量 dT, dp 変化する場合を考える。この系の蒸気圧 $p(T)$ の微分係数 dp/dT を求めよ。ただし, 温度 T , 圧力 p , 1モル当たりの液体と気体の体積 V_{liq}, V_{gas} , 1モル当たりの液体と気体の内部エネルギー U_{liq}, U_{gas} , 1モル当たりの液体と気体のエントロピー S_{liq}, S_{gas} の中で必要な物だけを用いて表せ。
- (4) この物質のモル当たりの気化熱を一定の値 ΔH とする。気体は理想気体の状態方程式に従うとし, また気化による体積変化が大きく液体の体積は気体に比べて無視できるとする。このとき蒸気圧を温度の関数で表せ。ただし, 気体定数を R , 温度 T_0 での蒸気圧を p_0 とする。
- (5) 絶対零度に近づくとときに, 蒸気圧 $p(T)$ の微分係数 dp/dT の値を熱力学第三法則より求めよ。



平成22年度 金沢大学大学院自然科学研究科
数物科学専攻 III コース物理学試験問題 (2次)

4.

水素原子を構成する電子(電荷 $-e$)は量子力学に従う粒子であり、原子核は原点に固定されているとする。基底状態および第一励起状態の波動関数は、

$$\begin{aligned} \psi_0(r, \theta, \phi) &= \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-\frac{r}{a_0}} & \psi_1(r, \theta, \phi) &= f(r) \left(2 - \frac{r}{a_0} \right) \\ \psi_2(r, \theta, \phi) &= f(r) \left(\frac{r}{a_0} \right) \cos \theta & \psi_3(r, \theta, \phi) &= f(r) \left(\frac{r}{a_0} \right) \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta e^{i\phi} \\ \psi_4(r, \theta, \phi) &= f(r) \left(\frac{r}{a_0} \right) \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta e^{-i\phi} & f(r) &= \frac{1}{\sqrt{32\pi a_0^3}} e^{-\frac{r}{2a_0}} \end{aligned}$$

である。ただし、 ψ_0 は基底状態の波動関数、 $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ は4重に縮退した第一励起状態の波動関数を示す。また a_0 はボーア半径、 r, θ, ϕ は3次元極座標である。

- (1) 水素の固有状態の波動関数は、主量子数 n 、軌道角運動量子数 l および軌道磁気量子数 m により分類される。 $n=1$ では、 $(l, m) = (0, 0)$ をとる。 $n=2$ の場合、とり得る (l, m) の組を全て挙げよ。

強さ F の一様な静電場を z 軸方向にかけたときの変化について考える。電場が小さいとして電場の効果を摂動で扱うとする。

- (2) 電場中で運動する電子の位置エネルギーを、摂動のハミルトニアン \mathcal{H}' とする。 \mathcal{H}' を F, e 、電子の位置座標 x, y, z のうちから必要なものを用いて表せ。
- (3) 摂動による基底状態エネルギーの変化量 $\langle \psi_0 | \mathcal{H}' | \psi_0 \rangle$ を求めよ。
- (4) 行列要素 $\langle \psi_1 | \mathcal{H}' | \psi_3 \rangle$ はゼロであることを示せ。

4つの第一励起状態を基底関数としたときの行列 $\langle \psi_i | \mathcal{H}' | \psi_j \rangle$ ($i, j = 1, 2, 3, 4$) の中で、基底関数 ψ_3 と ψ_4 に関する行列要素は全てゼロである。

- (5) 2行2列の行列 $\langle \psi_i | \mathcal{H}' | \psi_j \rangle$ ($i, j = 1, 2$) を求めよ。
- (6) 4つの第一励起状態の中での \mathcal{H}' の固有値および固有関数を全て求めよ。

