平成 23 年度

金沢大学大学院自然科学研究科

博士前期課程

数物科学専攻　Ⅲコース

入学試験

物理学

試験の注意

1. 問題紙は指示があるまで開かないこと。
2. 問題は４問（５枚），答案用紙は４枚，下書き用紙は１枚である。
3. 解答は，問題ごとに指定の答案用紙に記入すること。
4. 白紙の答案でも，受験番号を明記して提出すること。
5. スペースが足りない場合は，答案用紙の裏面を使用してもよい。ただしその場合は，裏面に続くことを明記し，表面の解答範囲と同様の高さから書き始めること。
6. 問題と下書き用紙は，持ち帰ること。

平成２３年度　金沢大学大学院自然科学研究科
数物科学専攻 III コース物理学試験問題

1.

一様な重力場の中で、頂点を下に軸を鉛直方向に向けておかれた頂角 2α の円錐のなめらかな内面に沿って運動をする質点について考える。質点の座標を図のように、頂点を原点 O として極座標系 (r, α, φ) で表わす。重力加速度を g、質点の質量を m として以下の問に答えよ。

(1) 質点のラグランジアンを極座標系を用いて求めよ。必要ならば、直交座標系 (x, y, z) と極座標系 (r, α, φ) との関係　$x = r\sin\alpha\cos\varphi$, $y = r\sin\alpha\sin\varphi$, $z = r\cos\alpha$　を利用せよ。

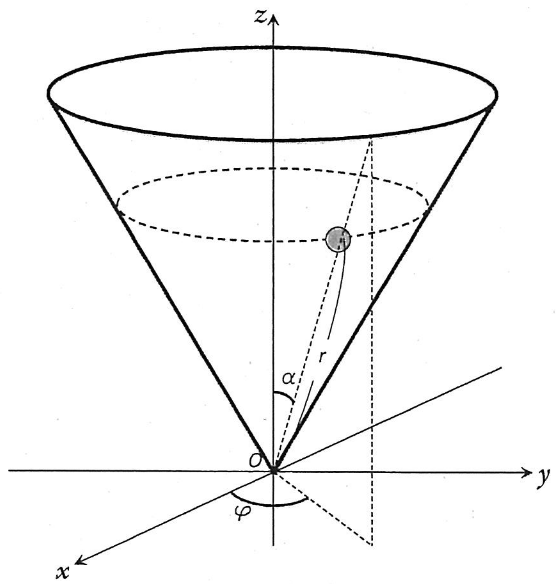
(2) r と φ に対するラグランジュの運動方程式を求めよ。

(3) 原点 O に関する角運動量の鉛直方向成分が保存されることを示せ。

(4) $r = r_0$ の位置より、質点に円錐の内面に沿って水平方向（φ 方向）に初速 v_0 を与えたところ、質点が水平な円運動をした。このときの v_0 を求めよ。

(5) 前問の円運動をしている質点に、円錐の内面に沿って r 方向に微小な撃力を加えたところ、質点の r 座標は $r = r_0$ のまわりで微小振動を始めた。微小振動の角振動数を求めよ。[ヒント: r_0 からの微小なずれを δ とし、$r = r_0 + \delta$ とおくことで δ の満たす微分方程式を求めるとよい。]

(6) $r = r_0$ の位置より、質点に円錐の内面に沿って水平方向に初速 v_1 $(< v_0)$ を与えた。質点が到達する最も低い位置での r の大きさを求めよ。



平成２３年度　金沢大学大学院自然科学研究科
数物科学専攻 III コース物理学試験問題

2.

図１のように半径が a と b の金属円筒がある。両者の軸は共通であり、$a < b$ とする。中心軸からの距離を r とする。また、円筒の長さ $2L$ は充分に長く、$b \ll 2L$ とする。

この同軸円筒の左端に電圧 V_0 の電源をつなぎ、右端には抵抗 R をつなぐ。このとき、I_0 の電流が流れた。金属の抵抗は無視できるとして、以下の問に答えよ。

(1) 円筒の周囲にできる電場 $E(r)$ は r の関数となる。$E(r)$ を $0 \leq r \leq 2b$ の範囲で求めよ。

(2) I_0 によって円周方向の磁場 $H_\theta(r)$ ができる。$H_\theta(r)$ を $0 \leq r \leq 2b$ の範囲で求めよ。

次に図２のように、抵抗 R を外し、２つの円筒の間を抵抗率 η の電解質（導電性の物質。透磁率 μ_0 である。ゼリー状に固まっている。）で満たす。このとき、電解質の中を r 方向に電流が流れた。

(3) 半径 r の位置での単位面積あたりの電流 $j(r)$ を、$a < r < b$ の範囲で求めよ。

(4) $z = -L$ から L の間で電解質の中を流れる全電流 $I_{\rm total}$ を求めよ。

(5) 内側の金属円筒には z 方向に $I(z)$ の電流が流れる。$I(z)$ を求めよ。また、$-L \leq z \leq L$ の範囲でグラフに示せ。

(6) 電解質中の位置 (r, z) での磁束密度 $B_\theta(r, z)$ を $I(z)$ を使って表せ。また、電解質が単位体積あたりに受ける Lorentz 力の大きさ $f(r, z)$ を求め、その向きを答えよ。

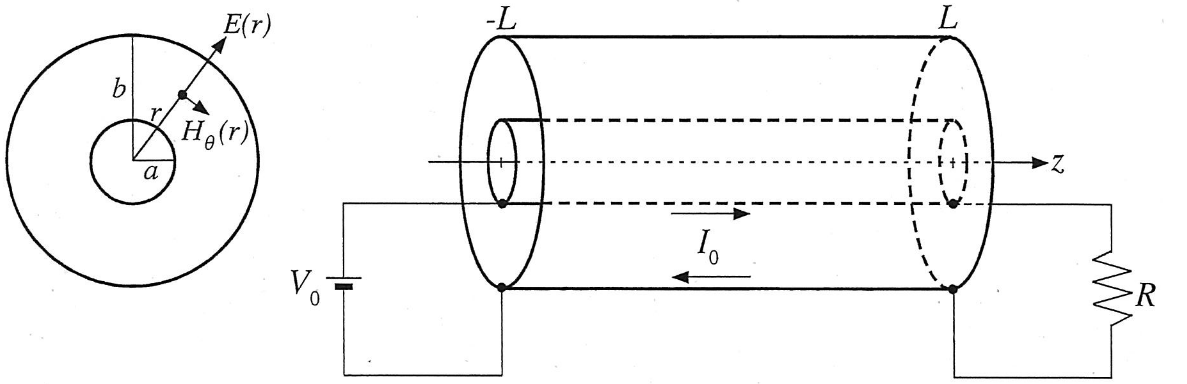


図 1

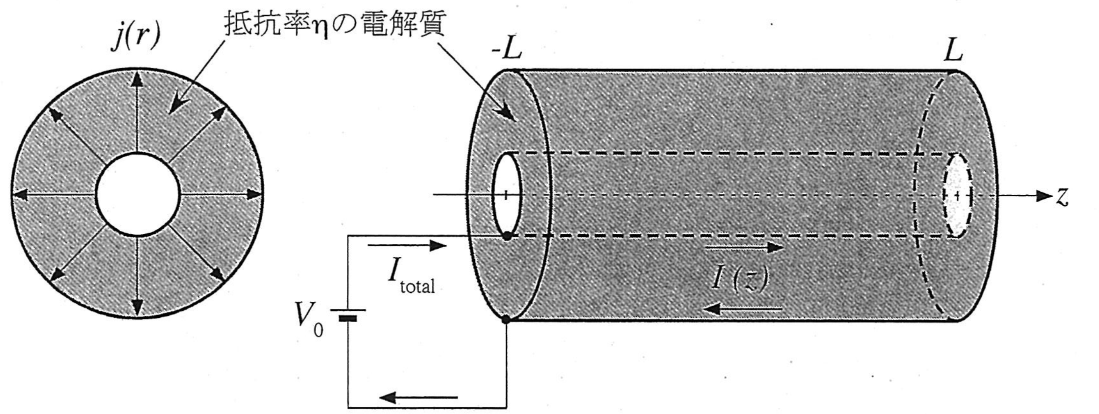


図 2

平成２３年度　金沢大学大学院自然科学研究科
数物科学専攻III.コース物理学試験問題

3.

磁性体の体積が磁場により変化する現象 (体積磁歪) について考える。磁性体の温度 T, 圧力 p, 磁場 B, エントロピー S, 体積 V, 磁気モーメント M とすると、内部エネルギー U に対して、熱力学第一法則は次のように表される。

$$dU = TdS - pdV + BdM$$

(1) ギブスの自由エネルギー G は $G \equiv U - TS + pV - BM$ で定義される。T, p, B を独立変数として G の全微分 dG を求めよ。

(2) エントロピー S, 体積 V, 磁気モーメント M をそれぞれ G の偏微分係数で表せ。

(3) 以下のマックスウェルの関係式を導け。

$$\left(\frac{\partial V}{\partial B}\right)_{T,\ p} = -\left(\frac{\partial M}{\partial p}\right)_{T,\ B}$$

磁気モーメント M が磁場 B と体積 V に比例する、すなわち $M = \chi BV$ と表される磁性体について以下の問に答えよ。ただし χ は T, p の関数で B には依存しないとする。また、等温圧縮率 κ は $\kappa \equiv -\dfrac{1}{V}\left(\dfrac{\partial V}{\partial p}\right)_{T,\ B}$ で定義される。

(4) 一定の温度・圧力において、磁場を変化させたときの体積変化率 Λ は $\Lambda \equiv \dfrac{1}{V}\left(\dfrac{\partial V}{\partial B}\right)_{T,\ p}$ と表される。(3) のマックスウェルの関係式から、Λ を χ とその偏微分係数、等温圧縮率 κ および磁場 B を用いて表せ。

(5) 一定の温度・圧力で、磁場を 0 から B まで変化させたとき、この磁性体の体積が V から $V + \Delta V$ に変化したとする。等温圧縮率 κ が磁場に依存しないとして、$\dfrac{\Delta V}{V} \ll 1$ のとき、$\dfrac{\Delta V}{V}$ を求めよ。

平成２３年度　金沢大学大学院自然科学研究科
数物科学専攻 III コース物理学試験問題

4.

質量 m の量子の次のポテンシャル中での１次元運動を考える。

$$V(x) = \begin{cases} \infty & x < 0 & \text{領域 A} \\ 0 & 0 \le x \le a & \text{領域 B} \\ \infty & a < x & \text{領域 C} \end{cases} \quad , \quad \text{ただし } a > 0$$

(1) 座標表示での波動関数 $\psi(x)$ について、領域の境界（$x = 0, x = a$）で課すべき境界条件を述べよ。

(2) 領域 B において、エネルギー固有状態の座標表示波動関数が満たすべき固有値方程式を書き下せ。

(3) エネルギー固有値を全て求めよ。

(4) この系が最初に基底状態にあり、外から光をあてるとその光が吸収されて、系は励起状態になった。この光の波長はどういう条件を満たしていたか。

(5) 基底状態の規格化された座標表示波動関数を求めよ。

(6) 基底状態での、運動量の期待値を求めよ。

(7) 基底状態での、運動量のゆらぎの大きさを求めよ。ただし、物理量の「ゆらぎの大きさ」とはその物理量を観測したときに得られる観測値分布の標準偏差（分散の正の平方根）である。

(8) この系において、古典的には 0 である基底状態のエネルギーが、量子力学においては 0 になれない理由を、不確定性原理に基づいて述べよ。