平成 23 年度

金沢大学大学院自然科学研究科

博士前期課程

数物科学専攻　Ⅲコース

入学試験（第2次）

物理学

試験の注意

1. 問題紙は指示があるまで開かないこと。
2. 問題は４問（７枚），答案用紙は４枚，下書き用紙は１枚である。
3. 解答は，問題ごとに指定の答案用紙に記入すること。
4. 白紙の答案でも，受験番号を明記して提出すること。
5. スペースが足りない場合は，答案用紙の裏面を使用してもよい。ただしその場合は，裏面に続くことを明記し，表面の解答範囲と同様の高さから書き始めること。
6. 問題と下書き用紙は，持ち帰ること。

平成２３年度　金沢大学大学院自然科学研究科博士前期課程
数物科学専攻IIIコース物理学試験問題（２次）

1．

図1に示すように，質量の無視できる自然長のばね (ばね定数 k) が地面に固定されている。質量 m の質点を，ばねからの高さ h の地点から落下させると，質点とばねは一体となって振動をはじめた。質点とばねの運動は鉛直方向のみであるとして，以下の問に答えよ。ただし，最初のばねの自然長の位置を原点として，鉛直上向きに正の座標系をとるものとする。

(1) ばねと一体となる直前の質点の速度を求めよ。

(2) ばねと質点が一体となった後の，ばねのつり合いの位置を求めよ。

(3) 質点の運動の振幅，および振動数を求めよ。

次に，図2に示すように、同じばねに同じ質量の質点を取り付けたものを媒質中に入れた。この媒質中では質点の速度に比例した抵抗がはたらき，その比例定数を μ ($\mu^2 < 4mk$) とする。つり合いの位置から距離 A だけ引っ張り，初速ゼロで手を離した。以下の問に答えよ。ただし，ばねにはたらく抵抗は無視できるとする。

(4) 質点の運動方程式を導け。

(5) 前問の運動方程式は定数係数の斉次1次の常微分方程式である。この運動方程式の解を求めよ。

(6) 質点の運動の周期 T を求めよ。

(7) この運動を図示せよ。また，$\mu = 0$ のときの運動の様子も同時に図示せよ。

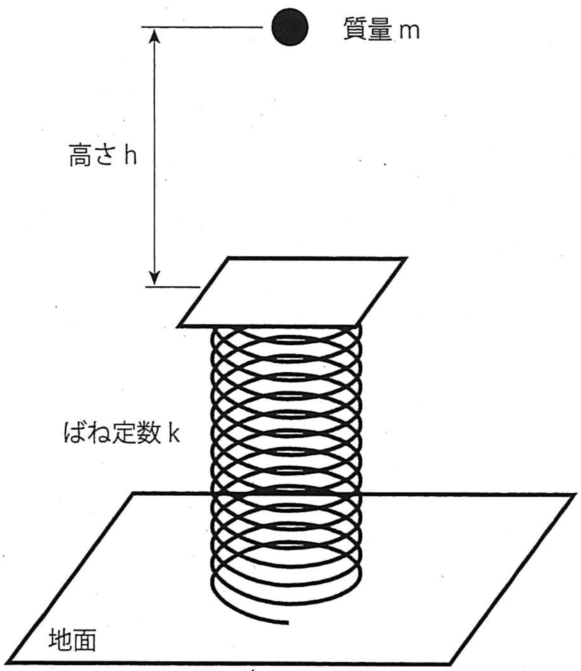

図 1:

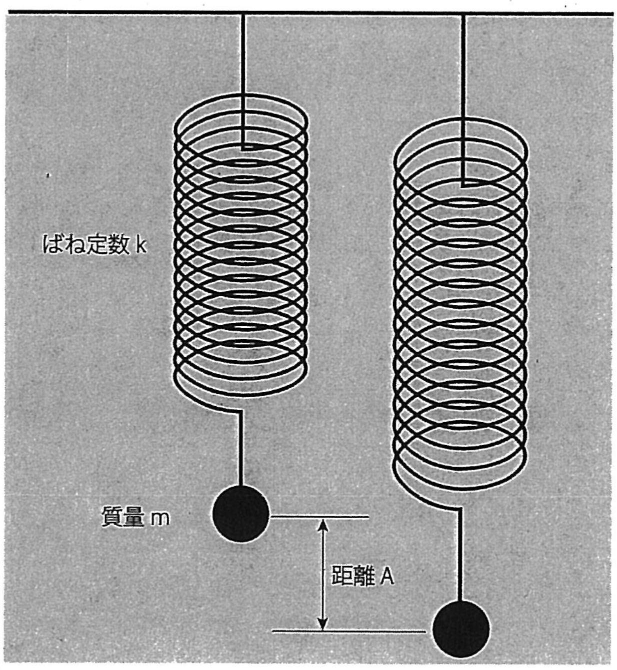

図 2:

平成23年度　金沢大学大学院自然科学研究科博士前期課程
数物科学専攻IIIコース物理学試験問題（第2次）

2.

図1のように半径aで1回巻きの円形コイルがあり，電流I_0が流れている。コイルの中心を原点とし，コイルの中心を通りコイルと垂直となるようにz軸をとる。コイルの太さは無視できる。真空の透磁率をμ_0として，以下の問に答えよ。

(1) コイルの円周上の電流素$I_0 d\vec{s}$を考える。これがz軸上の位置zに作る磁場のz成分の大きさと向きを求めよ。ただし，一般に$I_0 d\vec{s}$がそれから位置$\vec{l}$だけ離れたところに作る磁場$d\vec{H}$は以下の式で与えられる。

$$d\vec{H} = \frac{I_0}{4\pi}\frac{d\vec{s}\times\vec{l}}{l^3}$$

(2) コイル全体がz軸上の位置zに作る磁場の大きさ$H(z)$を求めよ。

さて，電流を流すのはやめ，図2のようにコイルに電圧計をつなぐ。そのうえで，細くて極めて長い棒磁石を，z軸上に置く。棒磁石の内部には全部でΦ_0の磁束が貫いている。S極は充分遠くにあるため，S極が作る磁場の影響は無視できるので，磁力線がすべて棒磁石のN極の先端から等方的に出て行くと近似する。次の問に答えよ。

(3) 単極の磁荷を用いて，棒磁石のN極が作る磁場を表わす。磁荷mが距離r離れたところに作る磁場の大きさは$H(r) = \dfrac{m}{4\pi\mu_0 r^2}$である。$m$と磁束$\Phi_0$の関係を求めよ。

以下の問ではmとΦ_0のいずれを用いても良い。

(4) N極は$z<0$の領域にあるとして，コイルを貫く磁束$\phi(z)$を求めよ。

(5) 棒磁石をz軸に沿って負の方向に一定の速さv_0で動かす。時刻$t=0$のとき，N極が$z=0$にあったとして，時刻$t(>0)$にコイルに発生する電圧の大きさ$V(t)$を求めよ。

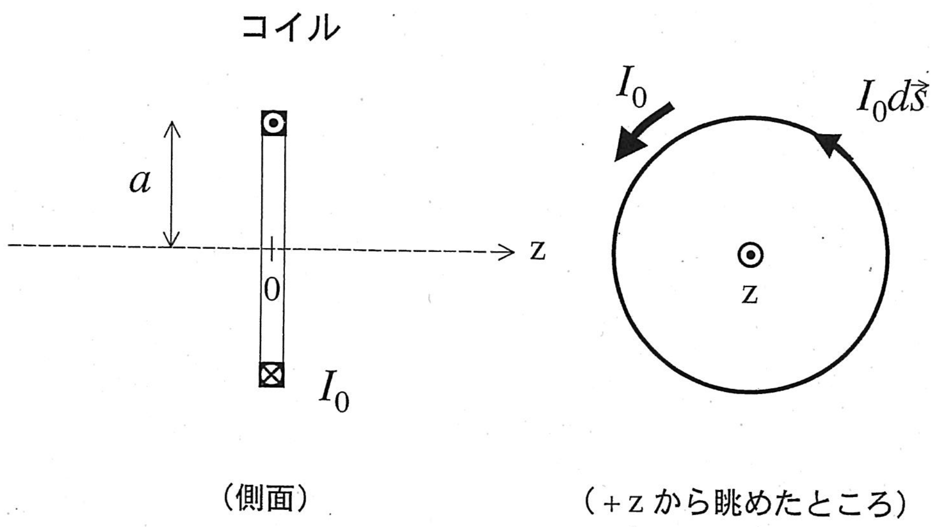
コイル
a
z
0
I_0
I_0
$I_0 d\vec{s}$
z
（側面）
（＋z から眺めたところ）

図１

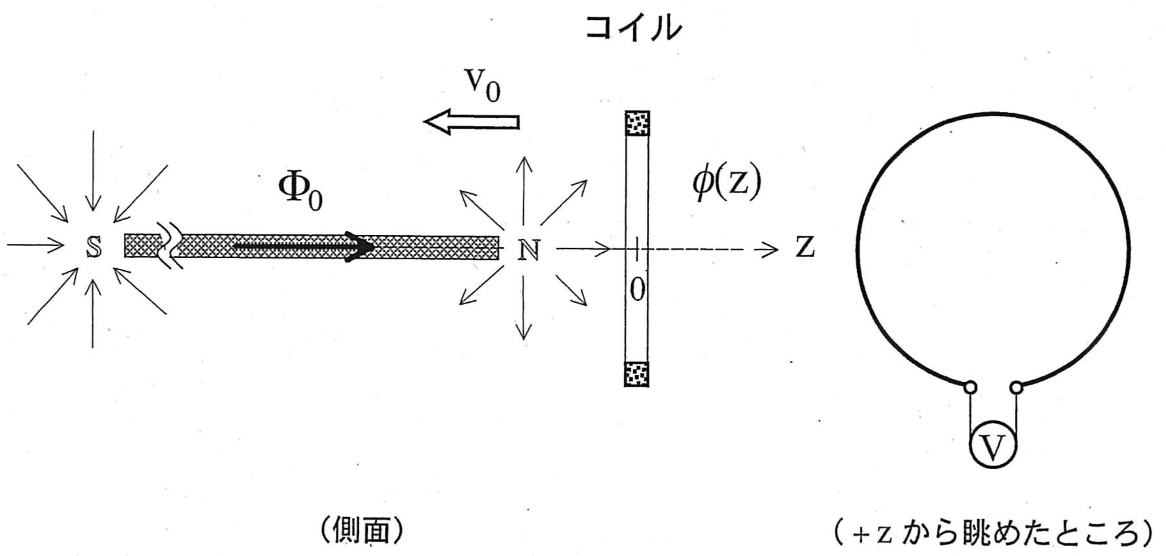
コイル
v_0
Φ_0
$\phi(z)$
S
N
z
0
V
（側面）
（＋z から眺めたところ）

図２

平成２３年度　金沢大学大学院自然科学研究科博士前期課程
数物科学専攻 III コース物理学試験問題 (2 次)

3.

図のように，N 個の磁気モーメントが等間隔に一列に並んでいる系がある。それぞれの磁気モーメントは，上向き ($\uparrow$) または下向き ($\downarrow$) のどちらか一方の状態のみを自由にとることができる。隣り合う 2 つの磁気モーメントの間には相互作用が働いており，相互作用のエネルギーは，2 つの磁気モーメントが平行な対 ($\uparrow\uparrow$ または $\downarrow\downarrow$) のとき $-J$，反平行な対 ($\uparrow\downarrow$ または $\downarrow\uparrow$) のとき J となる。ただし，この相互作用はすぐ隣り合う磁気モーメントの間にのみ働き，$J > 0$ とする。したがって，この系の全エネルギーを E とすると，図のように磁気モーメントが並んでいる場合は，$E = +J + J - J + J + J + J - J + J + \cdots$ となる。また，磁気モーメントの数 N は十分に大きく，$N - 1 \simeq N$ と近似してよい。

$$\uparrow\downarrow\uparrow\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\downarrow\uparrow \cdots\cdots$$

隣り合う磁気モーメントが平行に並んでいる対の数が n 個である状態について，以下の問に答えよ。ただしボルツマン定数は k_B とする。

(1) 系の全エネルギー E を求めよ。

(2) 系の状態数 W を求めよ。

(3) スターリングの公式 ($x \gg 1$ のとき，$\log x! \simeq x\log x - x$) を用いて，$\log W$ を近似せよ。

(4) エントロピー S は次のようになることを導け。

$$S = Nk_B\left[\log 2 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{E}{NJ}\right)\log\left(1 - \frac{E}{NJ}\right) - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{E}{NJ}\right)\log\left(1 + \frac{E}{NJ}\right)\right]$$

温度 T で実現する状態は，$\dfrac{\partial S}{\partial E} = \dfrac{1}{T}$ で決定される。

(5) この系の全エネルギー E を温度の関数として求めよ。

(6) $T \to 0$ と $T \to \infty$ の極限での n の値はそれぞれいくらになるか述べよ。

(7) 平行な対の数 n を温度の関数として求め，その概略を図示せよ。

4.

1次元における質量 m の自由粒子のシュレディンガー方程式は

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} \tag{i}$$

で与えられる。ただし，$\hbar = h/(2\pi)$ として h はプランク定数である。波動関数の初期値は

$$\psi(x,t=0) = N\exp\left(i\frac{p_0 x}{\hbar} - \frac{x^2}{2a^2}\right)$$

で与えられ，N は規格化定数，$a>0$，p_0 は実数とする。以下の問に答えよ。

(1) $t=0$ での確率密度関数 $|\psi(x,0)|^2$ の概略を図示せよ。

(2) 運動量表示を用いて方程式 (i) の解を求める。

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty} dp\phi(p,t)\exp\left(i\frac{px}{\hbar}\right) \tag{ii}$$

上式を式 (i) に代入することにより，運動量表示の波動関数 $\phi(p,t)$ に対する下の微分方程式を導け。

$$i\hbar\frac{\partial\phi(p,t)}{\partial t} = \frac{p^2}{2m}\phi(p,t) \tag{iii}$$

(3) 式 (iii) の解を $\phi(p,0)$ を用いて求めよ。

(4) 初期値 $\phi(p,0)$ は下の変換

$$\phi(p,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty} dx\psi(x,0)\exp\left(-i\frac{px}{\hbar}\right)$$

を行うことによって，

$$\phi(p,0) = N'\exp\left(-\frac{a^2}{2\hbar^2}(p-p_0)^2\right)$$

となることを示せ。ただし，N' は規格化定数とし，その具体形を求める必要はない。その計算の際に，下の公式を用いよ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp\left(-\alpha x^2 + \beta x\right) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \exp\left(\frac{\beta^2}{4\alpha}\right)$$

ここで，α は $\mathrm{Re}(\alpha) \geq 0$，$\alpha \neq 0$ を満たす任意の複素数，β は任意の複素数とする。

(5) 設問 (3)，(4) で得られた $\phi(p,t)$ より，運動量空間における確率密度関数 $|\phi(p,t)|^2$ の波束の幅を求め，その時間変化を考察せよ。

ただし，確率密度関数 $|\phi(p,t)|^2 = A\exp[-(p-p_0)^2/D^2]$ に対して，波束の幅とは D のこととする。

設問 (5) で得られた $\phi(p,t)$ を式 (ii) に代入し，積分することによって $\psi(x,t)$ が下式のように得られた。

$$\psi(x,t) = N''(t) \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{\left(x - \frac{p_0 t}{m}\right)^2}{a^2 + \frac{\hbar^2 t^2}{m^2 a^2}}\right) \exp(i\theta(x,t))$$

ただし，$\theta(x,t)$ は実数である。

(6) 座標空間における確率密度関数 $|\psi(x,t)|^2$ を求め，波束の運動についてその特徴を述べよ。